

# HOGYAN JÁTSSZUNK TÖBB JÁTÉKOT EGYSZERRE, TUCATNYI KÜLÖNBÖZŐ MÓDON?

ALKALMAZOTT MATEMATIKUS MSC DIPLOMAMUNKA

*Szerző:*  
Hégely Éva

*Témavezető:*  
Dr. Waldhauser Tamás  
Algebra és Számelmélet  
Tanszék

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI INTÉZET

2017

# **Köszönetnyilvánítás**

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Waldhauser Tamásnak, aki szakértelmével, hasznos tanácsaival, útmutatásaival és türelmével hozzájárult diplomamunkám elkészítéséhez.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Játékok és nyerő stratégiák</b>	<b>4</b>
<b>2. Normál játékok</b>	<b>7</b>
2.1. Hosszú diszjunktív kompozíció . . . . .	7
2.2. Rövid diszjunktív kompozíció . . . . .	8
2.3. Rövid konjunktív kompozíció . . . . .	10
2.4. Hosszú konjunktív kompozíció . . . . .	12
2.5. Hosszú szelektív kompozíció . . . . .	12
2.6. Rövid szelektív kompozíció . . . . .	14
<b>3. Betli játékok</b>	<b>16</b>
3.1. Hosszú diszjunktív kompozíció . . . . .	17
3.2. Rövid diszjunktív kompozíció . . . . .	18
3.3. Rövid konjunktív kompozíció . . . . .	19
3.4. Hosszú konjunktív kompozíció . . . . .	19
3.5. Rövid szelektív kompozíció . . . . .	20
3.6. Hosszú szelektív kompozíció . . . . .	21
<b>4. Példák a LEGO játékról</b>	<b>24</b>
<b>A. <math>0,123</math> oktális játék</b>	<b>29</b>
<b>B. <math>LEGO_+</math></b>	<b>30</b>
<b>C. <math>LEGO_{\oplus}</math></b>	<b>34</b>
<b>D. <math>LEGO_{\wedge}</math></b>	<b>38</b>
<b>E. <math>LEGO_{\Delta}</math></b>	<b>42</b>
<b>F. <math>LEGO_{\vee}</math></b>	<b>46</b>
<b>G. <math>LEGO_{\nabla}</math></b>	<b>50</b>
<b>H. Betli <math>LEGO_{\oplus}</math></b>	<b>54</b>
<b>I. Betli <math>LEGO_{\wedge}</math></b>	<b>58</b>
<b>J. Betli <math>LEGO_{\Delta}</math></b>	<b>62</b>
<b>K. Betli <math>LEGO_{\nabla}</math></b>	<b>66</b>

## Bevezetés

A dolgozat célja kombinatorikai játékok kompozícióira nyerő stratégia megadása. Összesen hat kompozíció szerint játszhatunk és mindegyiknek van normál és betli változata. Normál játékok esetén a két legalapvetőbb kompozíciós szabály az összeg és a szorzat, melyek elemzése megtalálható Csákány Béla tankönyvében [3]. A többi kompozíciós szabályról és azok nyerő stratégiáiról John H. Conway tesz említést bizonyítás nélkül [2].

A következőkben röviden összefoglaljuk a dolgozat fejezeteinek tartalmát. Az első fejezetben megadjuk a téma alapvető definícióit, illetve tételeit. Három fontos függvényről (Sprague–Grundy-, Kalmár–Steinhaus- és Conway-függvény) teszünk említést, amelyek leírják a játékok nyerő stratégiáit. Majd ismertetjük a normál játékok különböző kompozícióit, illetve a kompozíciók Sprague–Grundy-, Kalmár–Steinhaus- és Conway-függvényeit leíró tételeket, melyekre bizonyítást is adunk. A harmadik fejezetben a betli játékok ugyanezen kompozícióit tárgyaljuk. Végül a szakdolgozatom [4] témáját képező LEGO játék változataira alkalmazzuk a bizonyított tételeket, ezzel nyerő stratégiát adva a játékokra.

# 1. Játékok és nyerő stratégiák

Röviden összefoglaljuk azokat a fogalmakat és összefüggéseket, amelyekre szükségünk lesz (lásd Csákány Béla [3] tankönyvében).

Egyszerű játékoknak nevezzük a normál, végesfokú, szimmetrikus, kétszemélyes kombinatorikai játékokat. Egy egyszerű játékot matematikai struktúráként egy  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  hármas ír le, ahol

- $P$  az állások halmaza;
- $L \subseteq P \times P$  a lépések halmaza: akkor és csak akkor szabad a  $p$  állásból a  $q$  állásba lépni, ha  $(p, q) \in L$ ;
- $N$  a végállások halmaza:  $N = \{p \in P \mid \nexists q \in P : (p, q) \in L\}$ .

Egy játékot lehet normál vagy betli változatban játszani, attól függően hogyan fejezzük be a játékot. Normál játékban a végállásba lépő játékos nyer. Ezzel ellentétben a betli változatban az a játékos veszít, aki végállásba lép. A következő két definícióban szereplő álláshalmazok kulcsfontosságúak a nyerő stratégia meghatározásához. Itt, és a továbbiakban is, a felülvonás mindig az állások halmazára vonatkozó komplementert jelöli.

**1.1. Definíció.** Az  $M^+ \subseteq P$  halmazt a  $\mathcal{J}$  játék *magjának* nevezzük, ha

- (i) a végállások  $M^+$ -ban vannak,
- (ii) minden  $M^+$ -beli állásból csak  $\overline{M^+}$ -beli állásba lehet lépni,
- (iii) minden  $\overline{M^+}$ -beli állásból lehet  $M^+$ -beli állásba lépni.

**1.2. Definíció.** Az  $M^- \subseteq P$  halmazt a  $\mathcal{J}$  játék *betli magjának* nevezzük, ha

- (i) a végállások  $\overline{M^-}$ -ben vannak,
- (ii) minden  $M^-$ -beli állásból csak  $\overline{M^-}$ -beli állásba lehet lépni,
- (iii) minden  $\overline{M^-} \setminus N$ -beli állásból lehet  $M^-$ -beli állásba lépni.

**1.3. Tétel.** *Minden egyszerű játéknak létezik magja és betli magja, és ezek egyértelműen meghatározottak.*

A későbbiekben a magbeli állásokat jó állásoknak, a magon kívüli állásokat rossz állásoknak is nevezzük. A mag ismeretében megadható a nyerő stratégia: „Lépj mindig jó állásba!”. Ha a kezdőállás rossz, akkor a kezdő játékosnak, ha a kezdőállás jó, akkor a második játékosnak garantálja a nyerést ez a stratégia. A betli változat esetén ugyanígy megadható nyerő stratégia, de ott természetesen a betli magot kell használni.

**1.4. Definíció.** A  $H \subset \mathbb{N}_0$  halmazból kimaradó legkisebb nemnegatív egész számot  $\text{mex } H = \min(\mathbb{N}_0 \setminus H)$  jelöli (az angol „minimal excludant” kifejezés rövidítése).

**1.5. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *Sprague–Grundy-függvényének* azt a  $G^+ : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amely minden  $p \in P$  esetén

$$G^+(p) = \text{mex} \{G^+(q) \mid q \in P, (p, q) \in L\}.$$

**1.6. Megjegyzés.** Ha  $p \in N$ , akkor  $G^+(p) = \text{mex} \emptyset = 0$ .

**1.7. Tétel.** Minden egyszerű játéknak létezik *Sprague–Grundy-függvénye*, és az egyértelműen meghatározott. A *Sprague–Grundy-függvény zérushelyeinek* halmaza éppen a játék magja:  $M^+ = \{p \in P \mid G^+(p) = 0\}$ .

**1.8. Definíció.** Tetszőleges véges  $H \subset \mathbb{N}_0$  halmaz esetén jelölje  $\text{lego } H$  a halmaz legkisebb páros elemét, amennyiben van páros eleme  $H$ -nak. Ha  $H$  minden eleme páratlan, akkor legyen  $\text{lego } H$  a  $H$  halmaz legnagyobb (páratlan) eleme (a „least even, greatest odd” angol kifejezés rövidítése). Technikai okok miatt legyen  $\text{lego } \emptyset = -1$ .

**1.9. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *Kalmár–Steinhaus-függvényének* azt az  $R^+ : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amelyre minden  $p \in P$  esetén

$$R^+(p) = 1 + \text{lego} \{R^+(q) \mid q \in P, (p, q) \in L\}.$$

**1.10. Megjegyzés.** Ha  $p \in N$ , akkor  $R^+(p) = 1 + \text{lego } \emptyset = 0$ .

**1.11. Megjegyzés.** Tegyük fel, hogy mindkét játékos ismeri a játék magját, azaz a nyerő stratégiát. Természetes feltevés, hogy az a játékos, akinek nyerő stratégiája van, olyan stratégiát választ, amely a lehető leggyorsabb nyerést biztosítja számára, a másik játékos pedig igyekszik késleltetni a vereségét. Az  $R^+(p)$  érték megadja, hogy ezen feltevés mellett, a  $p$  állásból indulva, hány lépésig tart a játszma; ezt a számot nevezzük a  $p$  állás távolságának (angolul „remoteness”).

**1.12. Tétel.** Minden egyszerű játéknak létezik *Kalmár–Steinhaus-függvénye*, és az egyértelműen meghatározott. A *Kalmár–Steinhaus-függvény páros értékei adják meg a játék magját*:  $M^+ = \{p \in P \mid R^+(p) \text{ páros}\}$ .

**1.13. Definíció.** Tetszőleges véges  $H \subset \mathbb{N}_0$  halmaz esetén jelölje  $\text{gelo } H$  a halmaz legnagyobb páros elemét, amennyiben van páros eleme  $H$ -nak. Ha  $H$  minden eleme páratlan, akkor legyen  $\text{gelo } H$  a  $H$  halmaz legkisebb (páratlan) eleme (a „greatest even, least odd” angol kifejezés rövidítése). Technikai okok miatt legyen  $\text{gelo } \emptyset = -1$ .

**1.14. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *Conway-függvényének* azt az  $S^+ : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amelyre minden  $p \in P$  esetén

$$S^+(p) = 1 + \text{gelo} \{S^+(q) \mid q \in P, (p, q) \in L\}.$$

**1.15. Megjegyzés.** Ha  $p \in N$ , akkor  $S^+(p) = 1 + \text{gelo } \emptyset = 0$ .

**1.16. Megjegyzés.** Az 1.14. Definícióban szereplő függvényről Conway *On Numbers and Games* című könyvében olvastunk, ezért neveztük el Conway-függvénynek.

**1.17. Megjegyzés.** Tegyük fel, hogy mindkét játékos ismeri a játék magját, és akinek nyerő stratégiája van, olyan stratégiát választ, amely a lehető leglassabb nyerést biztosítja számára, a másik játékos pedig igyekszik siettetni a vereségét. (A 2.4. fejezetben találkozunk olyan szituációval, ahol ez a talán furcsának tűnő hozzáállás célravezető.) Az  $S^+(p)$  érték megadja, hogy ezen feltevés mellett a  $p$  állásból indulva hány lépésig tart a játszma (angolul „suspense number”).

**1.18. Tétel.** Minden egyszerű játéknak létezik Conway-függvénye, és az egyértelműen meghatározott  $A$  Conway-függvény páros értékei adják meg a játék magját:  $M^+ = \{p \in P \mid S^+(p) \text{ páros}\}$ .

## 2. Normál játékok

A következőkben hatféle lehetséges szabályt adunk meg arra, hogy hogyan játsszunk két játékot egyszerre. Könnyen belátható, hogy mind a hat kompozíciónál egyszerű játékokból egyszerű játékokat kapunk. Mind a hat esetben leírjuk, hogy az összetett játék nyerő stratégiája, pontosabban az azt megadó  $G^+$ ,  $R^+$ ,  $S^+$  függvények valamelyike, hogyan számítható ki a komponensek hasonló függvényeiből.

### 2.1. Hosszú diszjunktív kompozíció

**2.1. Definíció.** Legyenek  $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$  és  $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$  egyszerű játékok. Definiáljuk a  $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$  normál játékot a következőképpen. Az állások halmaza a  $P_1 \times P_2$  halmaz. A játékban egy lépés során a két játék közül csak az egyikben léphetünk; a játék akkor ér véget, ha mindkét komponens véget ér. Ezt a játékot  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  *összegének*, vagy *hosszú diszjunktív kompozíciójának* nevezzük.

**2.2. Definíció.** Az  $a$  és  $b$  nemnegatív egész számok *nim-összegén* azt az  $a \oplus b$  nemnegatív egész számot értjük, amelyet akkor kapunk, ha  $a$ -t és  $b$ -t kettes számrendszerben úgy adjuk össze, hogy az átvitelről „elfelejtkezünk” (azaz bitenkénti kizáró vagy műveletet végzünk).

**Jelölés.** Jelöljük az  $a \in \mathbb{N}_0$  szám kettes számrendszerbeli alakjában a  $2^i$  helyiértéken álló számjegyet  $a_i$ -vel:

$$a = \overline{a_m \cdots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 2 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 + \cdots = \sum 2^i \cdot a_i.$$

Az  $a$  és  $b$  számok nim-összegét számjegyenként számítjuk ki:

$$(a \oplus b)_i = a_i \oplus b_i = a_i + b_i \pmod{2}.$$

**2.3. Tétel.** A nim-összeadás művelete rendelkezik az alább tulajdonságokkal.

(i) *Kancellativitás:*

$$a' \neq a \Rightarrow a' \oplus b \neq a \oplus b \text{ és } b' \neq b \Rightarrow a \oplus b' \neq a \oplus b. \quad (2.1)$$

(ii) *Nim-monotonitás:*

$$c < a \oplus b \Rightarrow \exists a' < a: a' \oplus b = c \text{ vagy } \exists b' < b: a \oplus b' = c. \quad (2.2)$$

**Bizonyítás.** Először a kancellativitást bizonyítjuk. Mivel a nim-összeadás kommutatív művelet elég (2.1)-ben az első esetet vizsgálni. Ha  $a \oplus b = a' \oplus b$ , akkor

$$a' = a' \oplus 0 = a' \oplus (b \oplus b) = (a' \oplus b) \oplus b = (a \oplus b) \oplus b = a \oplus (b \oplus b) = a \oplus 0 = a. \quad (2.3)$$

Tehát a (2.3) egyenlőségből következik, hogy  $a = a'$ , azaz a nim-összeadás kancellatív.



Végül a nim-monotonitás tulajdonságát bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy  $c < a \oplus b$  és balról az első eltérés  $c$  és  $a \oplus b$  kettes számrendszerbeli alakjában a  $2^k$  helyiértéken lép fel, azaz

$$c_k < (a \oplus b)_k \text{ és } \forall i > k : c_i = a_i \oplus b_i.$$

Tehát  $c_k = 0$  és  $(a \oplus b)_k = 1$ , azaz  $a_k \neq b_k$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $a_k = 1$  és  $b_k = 0$ . Legyen  $a' = c \oplus b$ , ekkor  $a' \oplus b = (c \oplus b) \oplus b = c \oplus (b \oplus b) = c \oplus 0 = c$ . Ellenőrizni kell még, hogy  $a' < a$ . A  $2^k$  helyiértéken  $(a')_k = c_k \oplus b_k = 0 \oplus 0 = 0 < 1 = a_k$ . Ha  $i > k$ , akkor

$$(a')_i = c_i \oplus b_i = (a_i \oplus b_i) \oplus b_i = a_i \oplus (b_i \oplus b_i) = a_i \oplus 0 = a_i.$$

Tehát valóban  $a' < a$ , ezzel beláttuk, hogy a nim-összeadás nim-monoton. ■

**2.4. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $G_1^+$  és  $G_2^+$  a Sprague–Grundy-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  hosszú diszjunktív kompozíciójának Sprague–Grundy-függvénye:*

$$G_{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2}^+(p, q) = G_1^+(p) \oplus G_2^+(q). \quad (2.4)$$

**Bizonyítás.** Azt kell bebizonyítani, hogy a (2.4) jobb oldala által definiált függvény eleget tesz a Sprague–Grundy-függvény definíciójának:

$$G_1^+(p) \oplus G_2^+(q) \stackrel{?}{=} \text{mex}\{G_1^+(p_1) \oplus G_2^+(q), \dots, G_1^+(p_k) \oplus G_2^+(q), \\ G_1^+(p) \oplus G_2^+(q_1), \dots, G_1^+(p) \oplus G_2^+(q_l)\} = \text{mex } H,$$

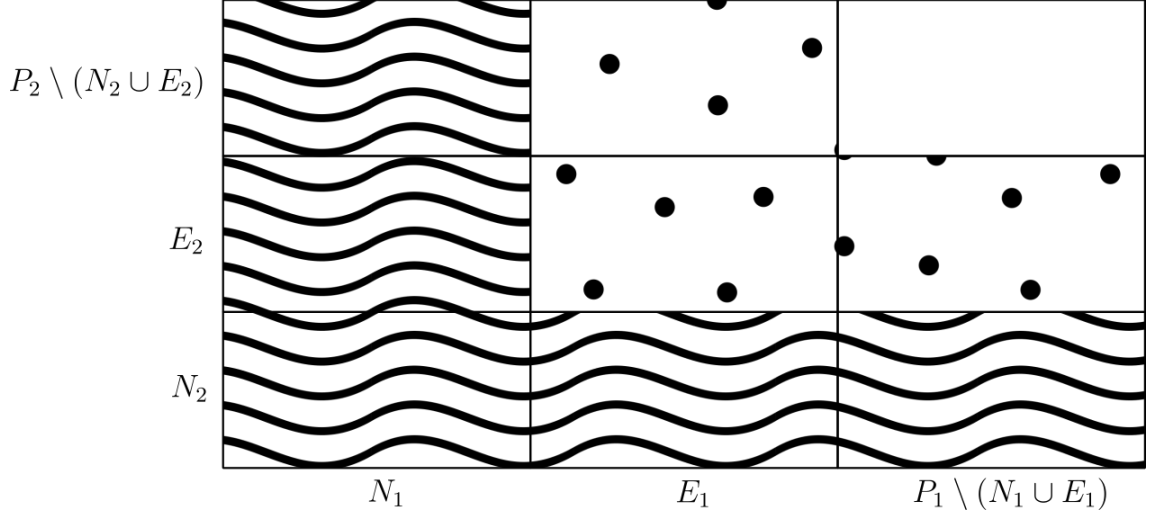
ahol  $p_1, \dots, p_k$  a  $p$ -ből egy lépésben elérhető állások a  $\mathcal{J}_1$  játékban, illetve  $q_1, \dots, q_l$  a  $q$ -ből elérhető állások a  $\mathcal{J}_2$  játékban.

Először megmutatjuk, hogy  $G_1^+(p) \oplus G_2^+(q)$  nem eleme a  $H$  halmaznak. Mivel  $G_1^+(p) = \text{mex}\{G_1^+(p_1), \dots, G_1^+(p_k)\}$ , a mex definíciója szerint bármely  $i$ -re  $G_1^+(p) \neq G_1^+(p_i)$ . A kancellativitás miatt  $G_1^+(p) \oplus G_2^+(q) \neq G_1^+(p_i) \oplus G_2^+(q)$ . Hasonlóan megmutatható, hogy bármely  $j$ -re  $G_1^+(p) \oplus G_2^+(q) \neq G_1^+(p) \oplus G_2^+(q_j)$ .

Még meg kell mutatni, hogy ha  $c < G_1^+(p) \oplus G_2^+(q)$ , akkor  $c \in H$ . A nim-monotonitás miatt létezik  $a' < G_1^+(p)$ , hogy  $c = a' \oplus G_2^+(q)$ , vagy létezik  $b' < G_2^+(q)$ , hogy  $c = G_1^+(p) \oplus b'$ . Az első esetben a mex definíciójából következik, hogy létezik olyan  $i$  index, melyre  $a' = G_1^+(p_i)$  teljesül. Tehát  $c = a' \oplus G_2^+(q) = G_1^+(p_i) \oplus G_2^+(q)$ , azaz  $c \in H$ . A másik esetben hasonlóan belátható, hogy van olyan  $j$  index, amelyre  $c = G_1^+(p) \oplus b' = G_1^+(p) \oplus G_2^+(q_j) \in H$ . ■

## 2.2. Rövid diszjunktív kompozíció

**2.5. Definíció.** Legyenek  $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$  és  $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$  egyszerű játékok. Definiáljuk a  $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$  normál játékot a következőképpen. Az állások halmaza a  $P_1 \times P_2$  halmaz. A játékban egy lépés során a két játék közül csak az egyikben léphetünk; a játék akkor ér véget, ha az egyik komponens véget ér. Ezt a játékot  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid diszjunktív kompozíciójának nevezzük.



1. ábra

**2.6. Definíció.** Egy  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  játék rövidre zárásán azt a  $\Phi(\mathcal{J})$  játékot értjük, amelynek álláshalmaza  $P \setminus (N \cup E)$ , a lépésszabály pedig ugyanaz mint  $\mathcal{J}$ -ben, ahol  $E$  azon állások halmaza, amelyekből egy lépésben nyerni lehet:

$$E = \{p \in P \mid \exists q \in N: (p, q) \in L\}.$$

**2.7. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék rövidre zárt Sprague–Grundy-függvényének azt az  $F^+ : P \setminus (N \cup E) \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amelyre minden  $p \in P \setminus (N \cup E)$  esetén

$$F^+(p) = \text{mex}\{F^+(q) \mid q \in P \setminus (N \cup E), (p, q) \in L\}.$$

**2.8. Megjegyzés.** A  $\mathcal{J}$  játék rövidre zárt Sprague–Grundy-függvénye nem más, mint a rövidre zárt  $\Phi(\mathcal{J})$  játék Sprague–Grundy-függvénye:  $F_{\mathcal{J}}^+ = G_{\Phi(\mathcal{J})}^+$ . Az 1.7. Tétel szerint a  $\Phi(\mathcal{J})$  játék magja az  $F^+$  függvény zérushelyeinek halmaza, ami nem más mint  $M^+ \setminus N$ , mivel az  $E$ -beli állások mind rosszak. Tehát a  $\mathcal{J}$  játék nyerő stratégiája triviális módon megkapható  $\Phi(\mathcal{J})$  nyerő stratégiájából.

**2.9. Lemma.** A  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok rövid diszjunktív kompozíciójának rövidre zárása megkapható a rövidre zárt  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok hosszú diszjunktív kompozíciójaként:

$$\Phi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2) = \Phi(\mathcal{J}_1) + \Phi(\mathcal{J}_2).$$

**Bizonyítás.** Legyen  $N_i$  a  $\mathcal{J}_i$  játék végállásainak halmaza,  $E_i$  pedig a  $\mathcal{J}_i$  játék azon állásainak halmaza, amelyekből egy lépésen belül meg lehet nyerni a játékot ( $i = 1, 2$ ). A  $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$  játék végállásainak halmaza (az 1. ábrán hullámmossal jelölt rész)

$$N_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2} = (N_1 \times P_2) \cup (P_1 \times N_2),$$

és azon állásainak halmaza, amelyekből egy lépésen belül meg lehet nyerni a játékot (pöttyös rész)

$$E_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2} = (E_1 \times (P_2 \setminus N_2)) \cup ((P_1 \setminus N_1) \times E_2).$$

A  $\Phi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)$  játék állásainak halmazát úgy kapjuk meg, hogy a  $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$  játék állásainak halmazából kivonjuk az  $N_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2} \cup E_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2}$  halmazt:

$$\begin{aligned} (P_1 \times P_2) \setminus (N_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2} \cup E_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2}) &= (P_1 \times P_2) \setminus (((N_1 \cup E_1) \times P_2) \cup (P_1 \times (N_2 \cup E_2))) \\ &= (P_1 \setminus (N_1 \cup E_1)) \times (P_2 \setminus (N_2 \cup E_2)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

A  $\Phi(\mathcal{J}_i)$  játék állásainak halmaza a  $P_i \setminus (N_i \cup E_i)$  halmaz. Ez azt jelenti, hogy a (2.5)-beli halmaz éppen a  $\Phi(\mathcal{J}_1)$  és a  $\Phi(\mathcal{J}_2)$  játékok álláshalmazainak Descartes-szorzata. Tehát beláttuk, hogy a  $\Phi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)$  és  $\Phi(\mathcal{J}_1) + \Phi(\mathcal{J}_2)$  játékok állásai ugyanazok. A két játék lépésszabálya is megegyezik:  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  közül az egyikben léphetünk, de csak úgy, hogy a (2.5)-beli halmazban maradjunk. ■

**2.10. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $F_1^+$  és  $F_2^+$  a rövidre zárt Sprague–Grundy-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid diszjunktív kompozíciójának rövidre zárt Sprague–Grundy-függvénye:*

$$F_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2}^+(p, q) = F_1^+(p) \oplus F_2^+(q).$$

**Bizonyítás.** A 2.8. Megjegyzés és a 2.9. Lemma segítségével következik a 2.4. Tételből. ■

### 2.3. Rövid konjunktív kompozíció

**2.11. Definíció.** Legyenek  $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$  és  $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$  egyszerű játékok. Defináljuk a  $\mathcal{J}_1 \wedge \mathcal{J}_2$  normál játékot a következőképpen. Az állások halmaza a  $P_1 \times P_2$  halmaz. A játékban egy lépés során mindkét játékban lépni kell; a játék akkor ér véget, ha az egyik komponens véget ér. Ezt a játékot  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  szorzatának, vagy rövid konjunktív kompozíciójának nevezzük.

**Jelölés.** Jelölje  $a \wedge b$  az  $a$  és  $b$  nemnegatív számok közül a kisebbiket:

$$a \wedge b = \min(a, b).$$

**2.12. Lemma.** *Legyenek  $H_1, H_2 \subset \mathbb{N}_0$  véges halmazok. Ekkor teljesül a következő:*

$$\text{lego}(H_1 \wedge H_2) = \text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2.$$

**Bizonyítás.** Legyenek  $H_1$  páros elemei  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  és  $H_1$  páratlan elemei  $b_1 < b_2 < \dots < b_l$ ; hasonlóan legyenek  $H_2$  páros, illetve páratlan elemei  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ , illetve  $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ . Megengedjük a  $k = 0$  ( $H_1$  csak páratlan számokat tartalmaz),  $l = 0$  ( $H_1$  csak páros számokat tartalmaz) és  $k = l = 0$  ( $H_1$  üres) esetet is (és hasonlóan  $H_2$ -nél is). Például ha  $H_1 = \emptyset$ , akkor

$$\text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2 = -1 \wedge \text{lego } H_2 = -1$$

és

$$\text{lego}(H_1 \wedge H_2) = \text{lego}(\emptyset \wedge H_2) = \text{lego } \emptyset = -1.$$

A továbbiakban (az általánosság megszorítása nélkül) feltesszük, hogy sem  $H_1$  sem  $H_2$  nem üres, és  $\text{lego } H_1 \leq \text{lego } H_2$ .

(i) Ha  $k > 0$  és  $m > 0$ , akkor  $\text{lego } H_1 = a_1$  és  $\text{lego } H_2 = c_1$ , így  $a_1 \leq c_1$ . A  $H_1 \wedge H_2$ -beli páros számok a következők lehetnek:

- $a_i \wedge d_j = a_i \geq a_1$ , (ha  $a_i < d_j$ );
- $b_i \wedge c_j = c_j \geq c_1 \geq a_1$ , (ha  $c_j < b_i$ );
- $a_i \wedge c_j = a_i \geq a_1$  (ha  $a_i \leq c_j$ ) vagy  $a_i \wedge c_j = c_j \geq c_1 \geq a_1$ , (ha  $c_j < a_i$ ).

Mivel minden  $H_1 \wedge H_2$ -ben előforduló páros szám legalább  $a_1 = a_1 \wedge c_1 \in H_1 \wedge H_2$ , ezért

$$\text{lego}(H_1 \wedge H_2) = a_1 = a_1 \wedge c_1 = \text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2.$$

(ii) Tegyük fel, hogy  $k > 0$  és  $m = 0$ , ekkor  $\text{lego } H_1 = a_1$  és  $\text{lego } H_2 = d_n$ , így  $a_1 \leq d_n$ . A  $H_1 \wedge H_2$  halmazban szereplő páros számok  $a_i \wedge d_j$  alakban állnak elő, és  $a_i \wedge d_j = a_i \geq a_1$  (ha  $a_i < d_j$ ). Tehát

$$\text{lego}(H_1 \wedge H_2) = a_1 = a_1 \wedge d_n = \text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2.$$

(iii) Ha  $k = 0$  és  $m > 0$ , akkor  $\text{lego } H_1 = b_l$  és  $\text{lego } H_2 = c_1$ , tehát  $b_l \leq c_1$ . Ebből következik, hogy  $b_i \leq b_l \leq c_1 \leq c_j$ , ahol  $i = 1, \dots, l$  és  $j = 1, \dots, m$ . A  $H_1 \wedge H_2$  halmazbeli számok csak páratlanok lehetnek, és közülük  $b_l$  a legnagyobb:  $b_i \wedge c_j = b_i \leq b_l$  és  $b_i \wedge d_j \leq b_i \leq b_l$ . Tehát

$$\text{lego}(H_1 \wedge H_2) = b_l = b_l \wedge c_1 = \text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2.$$

(iv) Végül ha  $k = m = 0$ , akkor  $\text{lego } H_1 = b_l$  és  $\text{lego } H_2 = d_n$ , ezért  $b_l \leq d_n$ . A  $H_1 \wedge H_2$ -beli számok csak páratlanok lehetnek és  $b_i \wedge d_j \leq b_i \leq b_l$ . Tehát

$$\text{lego}(H_1 \wedge H_2) = b_l = b_l \wedge d_n = \text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2.$$

■

**2.13. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $R_1^+$  és  $R_2^+$  a Kalmár–Steinhaus-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid konjunktív kompozíciójának Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$R_{\mathcal{J}_1 \wedge \mathcal{J}_2}^+(p, q) = R_1^+(p) \wedge R_2^+(q). \quad (2.6)$$

**Bizonyítás.** Azt kell bebizonyítanunk, hogy a (2.6) jobb oldalán lévő függvényre teljesül a Kalmár–Steinhaus-függvény definíciója:

$$R_1^+(p) \wedge R_2^+(q) \stackrel{?}{=} 1 + \text{lego}(H_1 \wedge H_2), \quad (2.7)$$

ahol (a 2.4. Tétel bizonyításának jelöléseit használva)

$$H_1 = \{R_1^+(p_1), \dots, R_1^+(p_k) \mid (p, p_i) \in L_1, i = 1, \dots, k\}, \quad (2.8)$$

$$H_2 = \{R_2^+(q_1), \dots, R_2^+(q_l) \mid (q, q_j) \in L_2, j = 1, \dots, l\}. \quad (2.9)$$

A 2.12. Lemma szerint a (2.7) egyenlőség jobb oldala egyenlő a következővel:

$$1 + \text{lego } H_1 \wedge \text{lego } H_2,$$

ami triviális módon nem más, mint

$$(1 + \text{lego } H_1) \wedge (1 + \text{lego } H_2) = R_1^+(p) \wedge R_2^+(q).$$

■

## 2.4. Hosszú konjunktív kompozíció

**2.14. Definíció.** Legyenek  $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$  és  $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$  egyszerű játékok. Definiáljuk a  $\mathcal{J}_1 \Delta \mathcal{J}_2$  normál játékot a következőképpen. Az állások halmaza a  $P_1 \times P_2$  halmaz. A játékban egy lépés során mindkét játékban lépni kell, ha még egyik komponens sem ért véget, egyébként pedig a még aktív komponensben lépünk. A játék akkor ér véget, ha mindkét komponens véget ér. Ezt a játékot  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  *hosszú konjunktív kompozíciójának* nevezzük.

**Jelölés.** Jelölje  $a \vee b$  az  $a$  és  $b$  nemnegatív számok közül a nagyobbikat:

$$a \vee b = \max(a, b).$$

**2.15. Lemma.** Legyenek  $H_1, H_2 \subset \mathbb{N}_0$  véges nemüres halmazok. Ekkor teljesül a következő:

$$\text{gelo}(H_1 \vee H_2) = \text{gelo } H_1 \vee \text{gelo } H_2.$$

**Bizonyítás.** Az állítás bizonyítása hasonló, mint a 2.12. Lemmáé. (Vegyük észre, hogy a 2.12. Lemmával ellentétben ez az állítás nem igaz, ha az egyik halmaz üres!) ■

**2.16. Tétel.** Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $S_1^+$  és  $S_2^+$  a Conway-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  *hosszú konjunktív kompozíciójának Conway-függvénye:*

$$S_{\mathcal{J}_1 \Delta \mathcal{J}_2}^+(p, q) = S_1^+(p) \vee S_2^+(q). \quad (2.10)$$

**Bizonyítás.** A 2.15. Lemma alkalmazásával hasonlóan bizonyítható az állítás, mint a rövid konjunktív kompozíció esetén (2.13. Tétel). Viszont a végállások esetét külön meg kell vizsgálni, mert a 2.15. Lemma nem érvényes, ha az egyik halmaz üres, vagyis ha  $p$  és  $q$  közül egyik végállás. Ha  $p \in N_1$  és  $q \notin N_2$ , akkor már csak a  $\mathcal{J}_2$  játékot játsszuk, tehát  $S_{\mathcal{J}_1 \Delta \mathcal{J}_2}^+(p, q) = S_2^+(q)$ . Másrészt

$$S_1^+(p) \vee S_2^+(q) = 0 \vee S_2^+(q) = S_2^+(q),$$

tehát (2.10) valóban teljesül. ■

## 2.5. Hosszú szelektív kompozíció

**2.17. Definíció.** Legyenek  $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$  és  $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$  egyszerű játékok. Definiáljuk a  $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$  normál játékot a következőképpen. Az állások halmaza a  $P_1 \times P_2$  halmaz. A játékban egy lépés során tetszés szerint léphetünk az egyik, a másik vagy mindkét játékban; a játék akkor ér véget, ha mindkét komponens véget ér. Ezt a játékot  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  *hosszú szelektív kompozíciójának* nevezzük.

**2.18. Definíció.** Definiáljuk a nemnegatív egész számok halmazán a  $\boxplus$  műveletet a következőképpen (lásd [2], Fig. 46):

$$a \boxplus b = \begin{cases} a + b, & \text{ha } a \text{ vagy } b \text{ páros;} \\ a + b - 1, & \text{ha } a \text{ és } b \text{ páratlan.} \end{cases}$$

**2.19. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy  $a \boxplus b$  akkor és csak akkor ad páros eredményt, ha  $a$  és  $b$  is páros.

**2.20. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $R_1^+$  és  $R_2^+$  a Kalmár–Steinhaus-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  hosszú szelektív kompozíciójának Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$R_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}^+(p, q) = R_1^+(p) \boxplus R_2^+(q). \quad (2.11)$$

**Bizonyítás.** A bizonyítás során a 2.13. Tétel bizonyításában lévő jelöléseket használjuk, ekkor  $R_1^+(p) = 1 + \text{lego } H_1$  és  $R_2^+(q) = 1 + \text{lego } H_2$ . Azt szeretnénk bizonyítani, hogy a (2.11) jobb oldala által megadott függvényre teljesül a Kalmár–Steinhaus-függvény definíciója. Mivel a  $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$  játékot hosszú szelektív kompozícióban játszunk, azaz vagy mindkét játékban lépünk, vagy csak az egyikben, ezért a bizonyítandó egyenlőség

$$(1 + \text{lego } H_1) \boxplus (1 + \text{lego } H_2) \stackrel{?}{=} 1 + \text{lego } K,$$

ahol

$$K := (H_1 \boxplus H_2) \cup (H_1 \boxplus (1 + \text{lego } H_2)) \cup ((1 + \text{lego } H_1) \boxplus H_2).$$

A 2.12. Lemma bizonyításához hasonlóan négy esetet vizsgálunk, és a  $H_1, H_2$  halmazok elemeire az ott bevezetett jelöléseket használjuk (de most nem lesz szükségünk a  $\text{lego } H_1 \leq \text{lego } H_2$  feltevésre).

(i) Ha  $k > 0$  és  $m > 0$ , akkor  $\text{lego } H_1 = a_1$  és  $\text{lego } H_2 = c_1$ . Ekkor

$$(1 + \text{lego } H_1) \boxplus (1 + \text{lego } H_2) = (1 + a_1) \boxplus (1 + c_1) = a_1 + c_1 + 1.$$

A  $K$  halmaz elemeit vizsgálva láthatjuk, hogy az  $a_i \boxplus c_j \in H_1 \boxplus H_2$  alakú számok párosak, az  $a_i \boxplus d_j, b_i \boxplus c_j, b_i \boxplus d_j \in H_1 \boxplus H_2$  számok páratlanok, csakúgy, mint az  $a_i \boxplus (1 + c_1), b_i \boxplus (1 + c_1) \in H_1 \boxplus (1 + \text{lego } H_2)$  és  $(1 + a_1) \boxplus c_j, (1 + a_1) \boxplus d_j \in (1 + \text{lego } H_1) \boxplus H_2$  alakú elemek. Tehát  $1 + \text{lego } K = 1 + a_1 \boxplus c_1 = 1 + a_1 + c_1$ .

(ii) Ha  $k > 0$  és  $m = 0$ , akkor  $\text{lego } H_1 = a_1$  és  $\text{lego } H_2 = d_n$ , így

$$(1 + \text{lego } H_1) \boxplus (1 + \text{lego } H_2) = (1 + a_1) \boxplus (1 + d_n) = a_1 + d_n + 2.$$

Az  $a_i \boxplus d_j, b_i \boxplus d_j \in H_1 \boxplus H_2$  és  $(1 + a_1) \boxplus d_j \in (1 + a_1) \boxplus H_2$  számok páratlanok, viszont  $H_1 \boxplus (1 + d_n)$  tartalmaz páros számo(ka)t is, mégpedig  $a_i \boxplus (1 + d_n)$  alakban. Ezért  $1 + \text{lego } K = 1 + a_1 \boxplus (1 + d_n) = a_1 + d_n + 2$ .

(iii) Ha  $k = 0$  és  $m > 0$ , akkor a (ii) esethez hasonlóan járhatunk el.

(iv) Ha  $k = m = 0$ , akkor  $\text{lego } H_1 = b_l$  és  $\text{lego } H_2 = d_n$ , ezért

$$(1 + \text{lego } H_1) \boxplus (1 + \text{lego } H_2) = (1 + b_l) \boxplus (1 + d_n) = b_l + d_n + 2.$$

Mivel  $b_i \boxplus d_j = b_i + d_j - 1, b_i \boxplus (1 + d_n) = b_i + d_n + 1, (1 + b_l) \boxplus d_j = b_l + d_j + 1 \in K$  mind páratlanok, ezért

$$1 + \text{lego } K = 1 + b_l + d_n + 1 = b_l + d_n + 2.$$

■

## 2.6. Rövid szelektív kompozíció

**2.21. Definíció.** Legyenek  $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$  és  $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$  egyszerű játékok. Definiáljuk a  $\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2$  normál játékot a következőképpen. Az állások halmaza a  $P_1 \times P_2$  halmaz. A játékban egy lépés során tetszés szerint léphetünk az egyik, a másik, vagy mindkét játékban; a játék akkor ér véget, ha az egyik komponens véget ér. Ezt  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid szelektív kompozíciójának nevezzük.

**2.22. Lemma.** A  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok rövid szelektív kompozíciójának rövidre zárása megkapható a rövidre zárt  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok hosszú szelektív kompozíciójaként:

$$\Phi(\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2) = \Phi(\mathcal{J}_1) \vee \Phi(\mathcal{J}_2).$$

**Bizonyítás.** A bizonyítás hasonlóan meggondolható, mint a 2.9. Lemma, ugyanazokat a halmazokat kapjuk mint ott (lásd az 1. ábrát). ■

**2.23. Megjegyzés.** Az 1.12. Tétel szerint a  $\Phi(\mathcal{J})$  játék magja az  $R_{\Phi(\mathcal{J})}^+$  függvény páros értékeit adó állások halmaza, ami nem más mint  $M^+ \setminus N$ , mivel az  $E$ -beli állások mind rosszak ( $p \in E$  esetén  $R^+(p) = 1$ ). Tehát a  $\mathcal{J}$  játék nyerő stratégiája triviális módon megkapható  $\Phi(\mathcal{J})$  nyerő stratégiájából, és az is könnyen belátható, hogy  $R_{\Phi(\mathcal{J})}^+(p) = R^+(p) - 2$  minden  $p \in P \setminus (N \cup E)$  esetén.

**2.24. Definíció.** Definiáljuk a nemnegatív egész számok halmazán a  $\nabla$  műveletet a következőképpen (lásd [2], Fig. 47.):

$$a \nabla b = \begin{cases} 0, & \text{ha } a = 0 \text{ vagy } b = 0; \\ 1, & \text{ha } a = 1 \text{ és } b \neq 0, \text{ vagy } b = 1 \text{ és } a \neq 0; \\ a + b - 2, & \text{ha } a \text{ vagy } b \text{ páros}; \\ a + b - 3, & \text{ha } a \text{ és } b \text{ páratlan.} \end{cases}$$

**2.25. Megjegyzés.** Könnyen észrevehető, hogy  $a \nabla b = (a - 2) \boxplus (b - 2) + 2$ , ha  $a, b \geq 2$ .

**2.26. Tétel.** Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $R_1^+$  és  $R_2^+$  a Kalmár–Steinhaus-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid szelektív kompozíciójának Kalmár–Steinhaus-függvénye:

$$R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^+(p, q) = R_1^+(p) \nabla R_2^+(q). \quad (2.12)$$

**Bizonyítás.** Ha  $p \in N_1$  vagy  $q \in N_2$ , akkor  $(p, q) \in N_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}$ . Az első esetben

$$R_1^+(p) \nabla R_2^+(q) = 0 \nabla R_2^+(q) = 0 = R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^+(p, q),$$

és a másik esetben is ugyanígy ellenőrizhető, hogy (2.12) teljesül.

Ha  $p \in E_1$  és  $q \notin N_2$  vagy  $p \notin N_1$  és  $q \in E_2$ , akkor  $(p, q) \in E_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}$  (lásd az 1. ábrát). Csak az első esetet tekintjük, a másik hasonlóan meggondolható. Ekkor  $R_1^+(p) = 1$  és  $R_2^+(q) \neq 0$ , tehát

$$R_1^+(p) \nabla R_2^+(q) = 1 \nabla R_2^+(q) = 1 = R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^+(p, q).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy  $p \notin N_1 \cup E_1$  és  $q \notin N_2 \cup E_2$ , ekkor tehát  $R_1^+(p), R_2^+(q) \geq 2$ . A 2.25. Megjegyzés alapján a következő teljesül:

$$R_1^+(p) \nabla R_2^+(q) = (R_1^+(p) - 2) \boxplus (R_1^+(q) - 2) + 2.$$

A 2.23. Megjegyzés szerint

$$(R_1^+(p) - 2) \boxplus (R_2^+(q) - 2) + 2 = R_{\Phi(\mathcal{J}_1)}^+(p) \boxplus R_{\Phi(\mathcal{J}_2)}^+(q) + 2,$$

ez pedig a 2.20. Tétel miatt nem más, mint  $R_{\Phi(\mathcal{J}_1) \nabla \Phi(\mathcal{J}_2)}^+(p, q) + 2$ . A 2.22. Lemma alapján  $R_{\Phi(\mathcal{J}_1) \nabla \Phi(\mathcal{J}_2)}^+(p, q) + 2 = R_{\Phi(\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2)}^+(p, q) + 2$ , ami a 2.23. Megjegyzés szerint éppen  $R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^+(p, q)$ . Ezzel beláttuk, hogy  $R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^+(p, q) = R_1^+(p) \nabla R_2^+(q)$ . ■



### 3. Betli játékok

A következőkben a normál játékokra is vizsgált kompozíciókat vesszük sorra. Először bevezetjük a  $G^+$ ,  $R^+$ ,  $S^+$  függvények betli változatait, amelyek a normál esethez hasonlóan megadják a nyerő stratégiát (azaz a betli magot).

**3.1. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *betli Sprague–Grundy-függvényének* azt a  $G^- : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amely minden  $p \in P$  esetén

$$G^-(p) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \in N; \\ \text{mex} \{G^-(q) \mid q \in P, (p, q) \in L\}, & \text{ha } p \in P \setminus N. \end{cases}$$

**3.2. Tétel.** *Minden egyszerű játéknak létezik betli Sprague–Grundy-függvénye, és az egyértelműen meghatározott. A betli Sprague–Grundy-függvény zérushelyeinek halmaza éppen a játék betli magja:  $M^- = \{p \in P \mid G^-(p) = 0\}$ .*

**3.3. Definíció.** Tetszőleges  $H \subset \mathbb{N}_0$  halmaz esetén jelölje  $\text{loge } H$  a halmaz legkisebb páratlan elemét, amennyiben van páratlan eleme  $H$ -nak. Ha  $H$  minden eleme páros, akkor  $\text{loge } H$  a  $H$  halmaz legnagyobb (páros) eleme (a „least odd, greatest even” angol kifejezés rövidítése). Technikai okok miatt legyen  $\text{loge } \emptyset = -1$ .

**3.4. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *betli Kalmár–Steinhaus-függvényének* azt az  $R^- : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amelyre minden  $p \in P$  esetén

$$R^-(p) = 1 + \text{loge} \{R^-(q) \mid q \in P, (p, q) \in L\}.$$

**3.5. Megjegyzés.** Ha  $p \in N$ , akkor  $R^-(p) = 1 + \text{loge } \emptyset = 0$ .

**3.6. Tétel.** *Minden egyszerű játéknak létezik betli Kalmár–Steinhaus-függvénye, és az egyértelműen meghatározott. A betli Kalmár–Steinhaus-függvény páratlan értékei adják meg a játék betli magját:  $M^- = \{p \in P \mid R^-(p) \text{ páratlan}\}$ .*

**3.7. Definíció.** Tetszőleges  $H \subset \mathbb{N}_0$  halmaz esetén jelölje  $\text{gole } H$  a halmaz legnagyobb páratlan elemét, amennyiben van páratlan eleme  $H$ -nak. Ha  $H$  minden eleme páros, akkor  $\text{gole } H$  a  $H$  halmaz legkisebb (páros) eleme (a „greatest odd, least even” angol kifejezés rövidítése). Technikai okok miatt legyen  $\text{gole } \emptyset = -1$ .

**3.8. Definíció.** Egy  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *betli Conway-függvényének* azt az  $S^- : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amelyre minden  $p \in P$  esetén

$$S^-(p) = 1 + \text{gole} \{S^-(q) \mid q \in P, (p, q) \in L\}.$$

**3.9. Megjegyzés.** Ha  $p \in N$ , akkor  $S^-(p) = 1 + \text{gole } \emptyset = 0$ .

**3.10. Tétel.** *Minden egyszerű játéknak létezik betli Conway-függvénye, és az egyértelműen meghatározott. A betli Conway-függvény páratlan értékei adják meg a játék betli magját:  $M^- = \{p \in P \mid S^-(p) \text{ páratlan}\}$ .*

**3.11. Definíció.** Egy  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  játék *betli rövidre zárásán* azt a  $\Psi(\mathcal{J})$  játékot értjük, ahol az állások halmaza  $P \setminus N$  és a lépésszabály ugyanaz, mint  $\mathcal{J}$ -ben.

**3.12. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a  $\mathcal{J}$  betli játékot megnyerni ugyanaz, mint a  $\Psi(\mathcal{J})$  normál játékban nyerni, azaz  $M_{\mathcal{J}}^- = M_{\Psi(\mathcal{J})}^+$ .

Az előbbi megjegyzésből is látszik, hogy elvileg könnyen áttérhetünk betli játékról normál játéokra, ez az áttérés azonban a kompozíciók vizsgálatakor nem mindig segít. Amint a következő alfejezetben látni fogjuk, játékok összegének elemzésére a betli esetben nem alkalmas a Sprague–Grundy-függvény.

### 3.1. Hosszú diszjunktív kompozíció

Ha a  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok hosszú diszjunktív összetételét betli módon játsszuk, akkor az összegjátékot megadó függvényre nincs összefüggés sem a Sprague–Grundy-, sem a Kalmár–Steinhaus-függvény és a Conway-függvény esetén sem, mint a normál változatban (2.4. Tétel). Tegyük fel, hogy mégis léteznek olyan  $\star$ ,  $\otimes$  és  $*$  műveletek az  $\mathbb{N}_0$  halmazon, hogy tetszőleges  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$  játékokra

$$G_{\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2}^-(p, q) = G_{\mathcal{J}_1}^-(p) \star G_{\mathcal{J}_2}^-(q), \quad (3.1)$$

$$R_{\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2}^-(p, q) = R_{\mathcal{J}_1}^-(p) \otimes R_{\mathcal{J}_2}^-(q), \quad (3.2)$$

$$S_{\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2}^-(p, q) = S_{\mathcal{J}_1}^-(p) * S_{\mathcal{J}_2}^-(q) \quad (3.3)$$

minden  $p \in P_1, q \in P_2$  esetén.

Legyen  $\mathcal{J}$  a 0, 123 oktális játék, melyet egy kupac kavicsal játszunk. A játék szabályai (lásd [1] 87. oldalán):

- (i) ha a kupacban egy kavics van, akkor azt elvehetjük;
- (ii) ha a kupacban két kavics van, akkor nem vehetünk el belőle;
- (iii) ha a kupacban legalább három kavics van, akkor elvehetünk belőle kettőt vagy hármat.

Megmutatjuk, hogy (3.1), (3.2) és (3.3) nem teljesülhet a  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$  esetben.

Két 0, 123 játék összege betli Sprague–Grundy-függvényének néhány értékét adja meg az A. Függelék 1. táblázata. A táblázat első oszlopából kiolvasható magának a 0, 123 játéknak a betli Sprague–Grundy-függvénye:  $G_{\mathcal{J}}^-(p) = G_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(p, 0)$ . Ha (3.1)-et a  $p = 3, q = 5$  értékekre tekintjük, akkor a lenti táblázat alapján azt kapjuk, hogy  $3 = G_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(3, 5) = G_{\mathcal{J}}^-(3) \star G_{\mathcal{J}}^-(5) = 2 \star 0$ . Másrészt a  $p = 3, q = 6$  helyettesítéssel az adódik, hogy  $2 = G_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(3, 6) = G_{\mathcal{J}}^-(3) \star G_{\mathcal{J}}^-(6) = 2 \star 0$ . Tehát a  $3 = 2 \star 0 = 2$  ellentmondást kaptuk.

Két 0, 123 játék összege betli Kalmár–Steinhaus-függvényének pár értékét adja meg az A. Függelék 2. táblázata. Az előzőekhez hasonlóan a táblázat első oszlopa határozza meg a  $\mathcal{J}$  játék betli Kalmár–Steinhaus-függvényét. A (3.2) egyenlőségbe a  $p = 1, q = 5$  értékeket helyettesítve adódik, hogy  $2 = R_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(1, 5) = R_{\mathcal{J}}^-(1) \otimes R_{\mathcal{J}}^-(5) = 1 \otimes 3$ . Továbbá a  $p = 1, q = 6$  értékek esetén azt kapjuk, hogy  $4 = R_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(1, 6) = R_{\mathcal{J}}^-(1) \otimes R_{\mathcal{J}}^-(6) = 1 \otimes 3$ . Tehát a  $2 = 1 \otimes 3 = 4$  ellentmondáshoz jutottunk.

Végül két 0, 123 játék összege betli Conway-függvényének néhány értékét adja meg az A. Függelék 3. táblázata. Ezen esetben is a táblázat első oszlopa határozza

meg a  $\mathcal{J}$  játék Conway-függvényét. Ha a  $p = 3$  és  $q = 1$  értékeket helyettesítjük (3.3)-ba, akkor azt kapjuk, hogy  $2 = S_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(3, 1) = S_{\mathcal{J}}^-(3) * S_{\mathcal{J}}^-(1) = 2 * 1$ . Másrészt ha  $p = 3$  és  $q = 5$ , akkor a következő adódik:  $4 = S_{\mathcal{J}+\mathcal{J}}^-(3, 5) = S_{\mathcal{J}}^-(3) * S_{\mathcal{J}}^-(5) = 2 * 1$ . Ekkor a  $2 = 2 * 1 = 4$  ellentmondásra jutunk.

## 3.2. Rövid diszjunktív kompozíció

**3.13. Definíció.** A  $\mathcal{J} = (P, L, N)$  egyszerű játék *betli rövidre zárt Sprague–Grundy-függvényének* azt az  $F^- : P \setminus N \rightarrow \mathbb{N}_0$  leképezést nevezzük, amelyre minden  $p \in P \setminus N$  esetén

$$F^-(p) = \text{mex} \{F^-(q) \mid q \in P \setminus N, (p, q) \in L\}.$$

**3.14. Megjegyzés.** A  $\mathcal{J}$  játék betli rövidre zárt Sprague–Grundy-függvénye nem más, mint a  $\Psi(\mathcal{J})$  játék Sprague–Grundy-függvénye:  $F_{\mathcal{J}}^- = G_{\Psi(\mathcal{J})}^+$ . A 3.12. Megjegyzés szerint  $M_{\mathcal{J}}^- = M_{\Psi(\mathcal{J})}^+$ , ami az 1.7. Tétel alapján megegyezik az  $F_{\mathcal{J}}^- = G_{\Psi(\mathcal{J})}^+$  függvény zérushelyeinek halmazával.

**3.15. Lemma.** A  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok *rövid diszjunktív kompozíciójának betli rövidre zárása megkapható a betli rövidre zárt  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok hosszú diszjunktív kompozíciójaként:*

$$\Psi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2) = \Psi(\mathcal{J}_1) + \Psi(\mathcal{J}_2).$$

**Bizonyítás.** Legyen  $N_i$  a  $\mathcal{J}_i$  játék végállásainak halmaza ( $i = 1, 2$ ). A  $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$  játék végállásainak halmaza pedig (a 2. ábrán vonalkázással jelölt rész)

$$N_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2} = (N_1 \times P_2) \cup (P_1 \times N_2).$$

A  $\Psi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)$  játék állásainak halmazát úgy határozhatjuk meg, hogy a  $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$  játék állásainak halmazából kivonjuk az  $N_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2}$  halmazt:

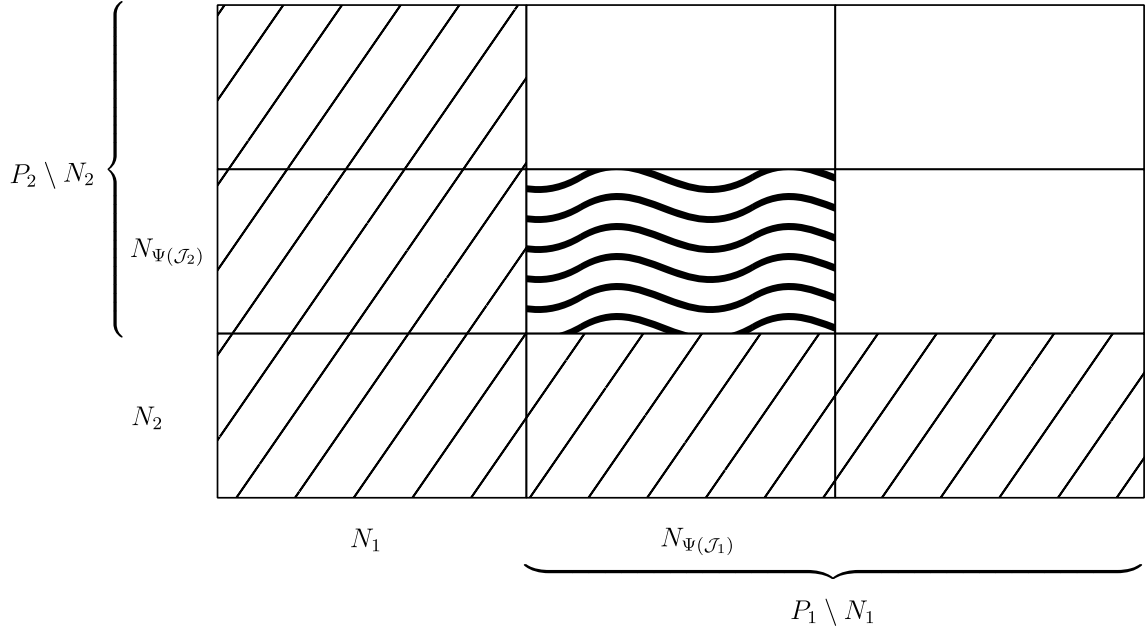
$$\begin{aligned} (P_1 \times P_2) \setminus N_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2} &= (P_1 \times P_2) \setminus ((N_1 \times P_2) \cup (P_1 \times N_2)) \\ &= (P_1 \setminus N_1) \times (P_2 \setminus N_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

A  $\Psi(\mathcal{J}_i)$  játék állásainak halmaza  $P_i \setminus N_i$  halmaz. Ez azt jelenti, hogy a (3.4)-beli halmaz éppen a  $\Psi(\mathcal{J}_1)$  és  $\Psi(\mathcal{J}_2)$  játékok álláshalmazainak Descartes-szorzata. Tehát  $\Psi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)$  és  $\Psi(\mathcal{J}_1) + \Psi(\mathcal{J}_2)$  állásai ugyanazok. A két játék lépésszabálya is megegyezik, hiszen  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  közül csak az egyikben léphetünk, de csak úgy, hogy a (3.4)-beli halmazban maradunk. (Az ábrán a hullámos rész mutatja a  $\Psi(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2) = \Psi(\mathcal{J}_1) + \Psi(\mathcal{J}_2)$  játék végállásainak halmazát.) ■

**3.16. Tétel.** Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $F_1^-$  és  $F_2^-$  a betli rövidre zárt Sprague–Grundy-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid diszjunktív kompozíciójának betli rövidre zárt Sprague–Grundy-függvénye:

$$F_{\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2}^-(p, q) = F_1^-(p) \oplus F_2^-(q).$$

**Bizonyítás.** A 3.14. Megjegyzés és a 3.15. Lemma segítségével következik a 2.4. Tételből. ■



2. ábra

### 3.3. Rövid konjunktív kompozíció

**3.17. Lemma.** *Legyenek  $H_1, H_2 \subset \mathbb{N}_0$  véges halmazok. Ekkor teljesül a következő:*

$$\text{loge}(H_1 \wedge H_2) = \text{loge } H_1 \wedge \text{loge } H_2.$$

**Bizonyítás.** A lemma bizonyítása hasonlóan végiggondolható, mint a 2.12. Lemma bizonyítása. ■

**3.18. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $R_1^-$  és  $R_2^-$  a betli Kalmár–Steinhaus-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid konjunktív kompozíciójának betli Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$R_{\mathcal{J}_1 \wedge \mathcal{J}_2}^-(p, q) = R_1^-(p) \wedge R_2^-(q).$$

**Bizonyítás.** Az állítás a 3.17. Lemma alkalmazásával hasonlóan bizonyítható, mint a 2.13. Tétel. ■

**3.19. Megjegyzés.** Az előbbi tételt a betli rövidre zárás eszközével is be lehet bizonyítani. Ekkor a  $\Psi(\mathcal{J}_1 \wedge \mathcal{J}_2) = \Psi(\mathcal{J}_1) \wedge \Psi(\mathcal{J}_2)$  összefüggést alkalmazva visszavezetjük a normál változatra, és a normál változatban játszott rövid konjunktív kompozícióra vonatkozó 2.13. Tétel alapján bizonyítható az állítás.

### 3.4. Hosszú konjunktív kompozíció

**3.20. Lemma.** *Legyenek  $H_1, H_2 \subset \mathbb{N}_0$  véges nemüres halmazok. Ekkor teljesül a következő:*

$$\text{gole}(H_1 \vee H_2) = \text{gole } H_1 \vee \text{gole } H_2.$$

**Bizonyítás.** A 2.15. Lemma bizonyítása alapján könnyen meggondolható az állítás. ■

**3.21. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $S_1^-$  és  $S_2^-$  a betli Conway-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  hosszú konjunktív kompozíciójának betli Conway-függvénye:*

$$S_{\mathcal{J}_1 \Delta \mathcal{J}_2}^-(p, q) = S_1^-(p) \vee S_2^-(q).$$

**Bizonyítás.** Az előző lemma alkalmazásával hasonlóan bizonyítható az állítás, mint a normál esetben (2.16. Tétel). ■

### 3.5. Rövid szelektív kompozíció

**3.22. Lemma.** *A  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok rövid szelektív kompozíciójának betli rövidre zárása megkapható a betli rövidre zárt  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok hosszú szelektív kompozíciójaként:*

$$\Psi(\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2) = \Psi(\mathcal{J}_1) \vee \Psi(\mathcal{J}_2).$$

**Bizonyítás.** Az állítás hasonlóan bizonyítható, mint a 3.15. Lemma a 2. ábra segítségével. ■

**3.23. Megjegyzés.** Meg lehet mutatni, hogy  $R_{\Psi(\mathcal{J})}^+(p) = R^-(p) - 1$  minden  $p \in P \setminus N$  esetén.

**3.24. Definíció.** Definiáljuk a nemnegatív egészek halmazán a  $\blacktriangledown$  műveletet a következőképpen (lásd [2], Fig. 48):

$$a \blacktriangledown b = \begin{cases} 0, & \text{ha } a = 0 \text{ vagy } b = 0; \\ a + b - 1, & \text{ha } a \text{ vagy } b \text{ páratlan}; \\ a + b - 2, & \text{ha } a \text{ és } b \text{ páros.} \end{cases}$$

**3.25. Megjegyzés.** Könnyen észrevehető, hogy  $a \blacktriangledown b = (a - 1) \boxplus (b - 1) + 1$ , ha  $a, b \geq 1$ .

**3.26. Tétel.** *Legyenek  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok,  $R_1^-$  és  $R_2^-$  a betli Kalmár–Steinhaus-függvényeik. Ekkor  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  rövid szelektív kompozíciójának betli Kalmár–Steinhaus-függvénye:*

$$R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^-(p, q) = R_1^-(p) \blacktriangledown R_2^-(q). \quad (3.5)$$

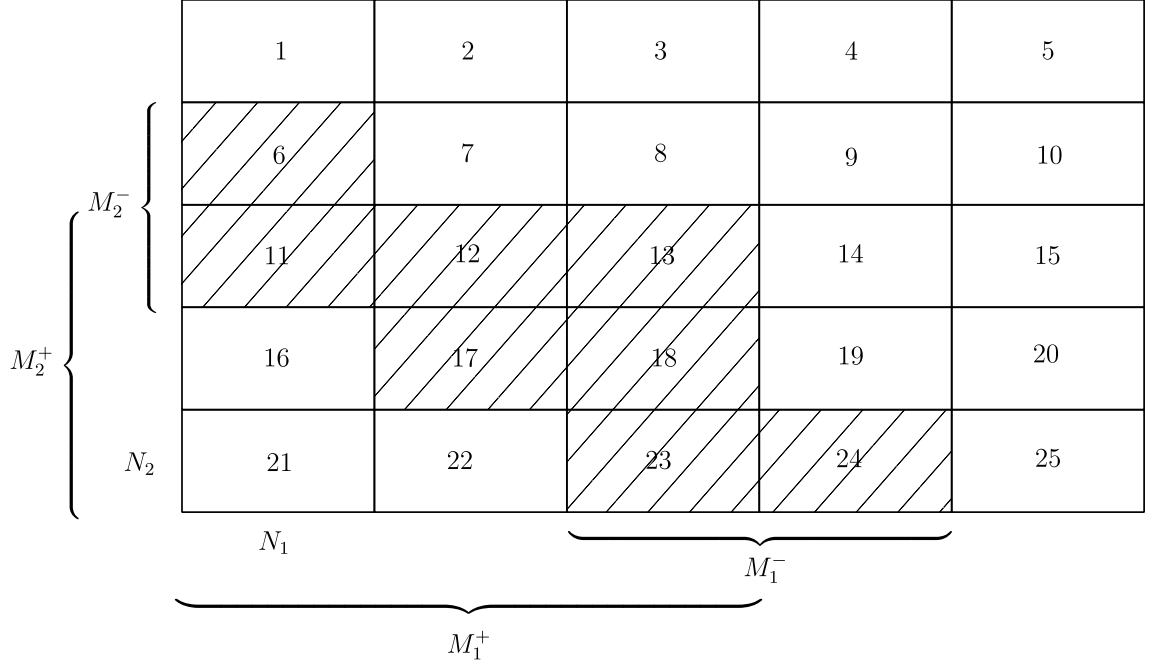
**Bizonyítás.** Ha  $p \in N_1$  vagy  $q \in N_2$ , akkor  $(p, q) \in N_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}$ . Tekintsük az első esetet:

$$R_1^-(p) \blacktriangledown R_2^-(q) = 0 \blacktriangledown R_2^-(q) = 0 = R_{\mathcal{J}_1 \nabla \mathcal{J}_2}^-(p, q).$$

Hasonlóan  $q \in N_2$  esetén is teljesül (3.5).

A továbbiakban tegyük fel, hogy  $p \notin N_1$  és  $q \notin N_2$ , ekkor  $R_1^-(p), R_2^-(q) \geq 1$ . A 3.25. Megjegyzés miatt teljesül a következő:

$$R_1^-(p) \blacktriangledown R_2^-(q) = (R_1^-(p) - 1) \boxplus (R_2^-(q) - 1) + 1.$$



3. ábra

A 3.23. Megjegyzés szerint

$$(R_1^-(p) - 1) \boxplus (R_2^-(q) - 1) + 1 = R_{\Psi(\mathcal{J}_1)}^+(p) \boxplus R_{\Psi(\mathcal{J}_2)}^+(q) + 1,$$

ami nem más, mint  $R_{\Psi(\mathcal{J}_1) \vee \Psi(\mathcal{J}_2)}^+(p, q) + 1$  a 2.20. Tétel alapján. A 3.22. Lemma miatt  $R_{\Psi(\mathcal{J}_1) \vee \Psi(\mathcal{J}_2)}^+(p, q) + 1 = R_{\Psi(\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2)}^+(p, q) + 1$ , ez pedig a 3.23. Megjegyzés szerint éppen  $R_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}^-(p, q)$ . Tehát ezzel beláttuk, hogy  $R_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}^-(p, q) = R_1^-(p) \blacktriangledown R_2^-(q)$ . ■

### 3.6. Hosszú szelektív kompozíció

A hosszú szelektív kompozíció esetén a hosszú diszjunktív kompozícióhoz hasonlóan önmagában sem a  $G^-$ , sem az  $R^-$ , sem az  $S^-$  függvény nem adja meg a betli játék nyerő stratégiáját. Viszont ha ismerjük  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  normál és betli magját is, akkor meg tudjuk határozni a  $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$  játék betli magját.

**3.27. Tétel.** *A  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  egyszerű játékok hosszú szelektív kompozíciójának betli magja*

$$M_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}^- = ((M_1^+ \setminus N_1) \times (M_2^+ \setminus N_2)) \cup (M_1^- \times N_2) \cup (N_1 \times M_2^-). \quad (3.6)$$

**Bizonyítás.** Az átláthatóság érdekében a  $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$  játék álláshalmazát felosztottuk 25 diszjunkt halmazra aszerint, hogy a komponensek benne vannak-e a normál vagy a betli magban (lásd a 3. ábrát). A bizonyítás során azt kell megmutatni, hogy (3.6) jobb oldalán lévő halmazra (a vonalkázott részre) teljesül a betli mag definíciója (1.2. Definíció). A vonalkázott részt jelöljük  $V$ -vel; megmutatjuk, hogy  $M_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}^- = V$ .

- (i) Először is a kompozíció végállásainak halmaza  $V$ -n kívül kell legyen, ez igaz, hiszen  $N_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2} = N_1 \times N_2 \subseteq \bar{V}$ .

- (ii) Be kell még látnunk, hogy minden  $V$ -beli állásból csak  $\overline{V}$ -beli állásba lehet lépni. Vegyük például a 12-es halmazt: ha csak a  $\mathcal{J}_1$  játékban lépünk, akkor a 14-es és 15-ös halmazokba tudunk lépni, mert  $12 \subseteq M_1^+$ . Ha csak a  $\mathcal{J}_2$  játékban lépünk, akkor a 12-es halmazból csak a 2-es halmazba tudunk lépni, mert  $12 \subseteq M_2^+$  és  $12 \subseteq M_2^-$ . Léphetünk még mindkét játékban egyszerre is. Ekkor a  $\mathcal{J}_1$  és  $\mathcal{J}_2$  játékok 12-ből megengedett lépéshalmazainak Descartes-szorzatába lehet lépni, ami nem más, mint  $4, 5 \subseteq \overline{V}$ .

A többi eset hasonlóan meggondolható. Az alábbiakban felsoroljuk melyik halmazból hova lehet lépni (a játék szimmetriáját figyelembe véve a főátló alatti halmazokat nem vizsgáljuk).

- A 6-os halmaz esetén a  $\mathcal{J}_1$  játék végállásban van, ezért csak a  $\mathcal{J}_2$  játékban tudunk lépni, éspedig az 1-es, 16-os és 21-es halmazokba.
- Ha 11-ből lépünk, akkor szintén csak a  $\mathcal{J}_2$  játékban léphetünk és ott is csak az 1-es halmazba.
- Ha a 13-as halmazból lépünk, akkor 15-be és 3-ba tudunk egy játék esetén lépni, mindkettő esetén pedig az 5 halmazba.
- A 17-es halmaz esetén, ha egy játékban lépünk, akkor a 19-es, 20-as, illetve 2-es, 7-es halmazokba léphetünk; ha két játékban lépünk egyszerre, akkor a 4-es, 5-ös, 9-es és 10-es halmazba léphetünk.

- (iii) Végül még le kell ellenőrizni, hogy minden  $V$ -n kívüli állásból lehet  $V$ -be lépni. Részletesebben a 2-es halmaz esetét bizonyítjuk. Ha  $\mathcal{J}_1$ -ben lépünk, akkor csak a 4-es vagy 5-ös halmazokba léphetünk, hiszen  $2 \subseteq M_1^+$ . Másrészt mivel  $2 \subseteq \overline{M_1^-}$ , ezért van olyan lépés, ami 3-ba vagy 4-be vezet. Tehát biztosan tudunk 2-ből 4-be lépni. Ha csak a  $\mathcal{J}_2$  játékban lépünk, akkor  $2 \subseteq \overline{M_2^+}$  miatt tudunk 12-be, 17-be vagy 22-be lépni. Az első két esetben máris  $V$ -be érkeztünk, a harmadik esetben pedig mindkét játékban egyszerre lépve a 24-es halmazba juthatunk.

A többi  $V$ -n kívüli halmaz esetén (a 21-est kivéve) az előbbiekhöz hasonlóan csak megadunk  $V$ -be vezető lépéseket.

- Az 1-es halmaz esetén csak  $\mathcal{J}_2$ -ben léphetünk és ott tudunk 6-ba vagy 11-be lépni.
- Ha 3-ból lépünk, akkor elég  $\mathcal{J}_2$ -ben lépni, hogy a  $V$ -beli a 13-as, 18-as vagy 23-as halmazba jussunk.
- A 4-es halmazból a következő halmazok közül legalább az egyikbe tudunk lépni: 6, 11, 12, 17 (mindkét játékban lépve), illetve 24 ( $\mathcal{J}_2$ -ben lépve).
- Az 5-ös halmazból mindkét játékban lépve a következő halmazok valamelyikébe biztosan tudunk lépni: 6, 11, 12, 13, 17, 18, 23, 24.
- A 7-es halmaz esetén csak  $\mathcal{J}_2$ -ben lépve 17-be, vagy mindkét játékban lépve 24-be tudunk lépni.

- Ha 8-ból lépünk, akkor elég  $\mathcal{J}_2$ -ben lépni, mindenképpen lesz 18-ba vagy 23-ba vezető lépésünk.
- A 9-es halmazból a 6 (csak  $\mathcal{J}_1$ -ben lépve), 24 (csak  $\mathcal{J}_2$ -ben lépve) és 17 (mindkét játékban lépve) lehetőségek közül legalább az egyik rendelkezésünkre áll.
- A 16-os halmaz esetén csak  $\mathcal{J}_2$ -ben léphetünk és ott van a 6-os halmazba vezető lépésünk.





## 4. Példák a LEGO játékról

A LEGO játék egy kétszemélyes játék, melynek egy téglalap alakú LEGO-kocka a kezdőállása. A játékosok felváltva rakhatnak egyre kisebb építőköveket egymás tetejére, így egyre kisebb és kisebb téglalapokra lesz felosztva az építmény. Amikor egy téglalapra egy építőkockát teszünk, azt mindig a téglalap valamelyik széléhez kell illeszteni. Az illeszkedő oldalaknak egyforma hosszúaknak kell lenniük, az éppen lerakott építőkocka másik oldalának pedig rövidebbnek kell lennie, mint a téglalap megfelelő oldala. A játék célja, hogy  $1 \times 1$ -es négyzeteket kapjunk, mivel ezekre már nem lehet kisebb építőkockát helyezni. A játékot tizenkét változatban játszhatjuk, a 2. és 3. fejezetek eredményeinek segítségével az alábbi tizenkét esetben tudjuk kiszámítani a játék magját. A szakdolgozatomban ezek közül három eset normál változatát (hosszú diszjunktív, rövid konjunktív és hosszú szelektív) tárgyaltuk.

- hosszú diszjunktív változat  $\text{LEGO}_+$ : egy lépésben csak egy téglalapra tehetünk építőkockát; a játék ér véget, amikor csupa  $1 \times 1$ -es téglalapok vannak;
- rövid diszjunktív változat  $\text{LEGO}_\oplus$ : egy lépésben csak egy téglalapra tehetünk építőkockát; a játék akkor ér véget, amint kialakul egy  $1 \times 1$ -es téglalap;
- rövid konjunktív változat  $\text{LEGO}_\wedge$  egyszerre minden téglalapra kell építőkockát tenni; a játék akkor ér véget, amint kialakul egy  $1 \times 1$ -es téglalap;
- hosszú konjunktív változat  $\text{LEGO}_\Delta$ : egyszerre minden téglalapra kell építőkockát tenni; a játék ér véget, amikor csupa  $1 \times 1$ -es téglalapok vannak;
- hosszú szelektív változat  $\text{LEGO}_\vee$  : tetszőleges számú téglalapra tehetünk építőköveket; a játék akkor ér véget, amikor csupa  $1 \times 1$ -es téglalapok vannak;
- rövid szelektív változat  $\text{LEGO}_\nabla$  tetszőleges számú téglalapra tehetünk építőköveket; a játék akkor ér véget, amint kialakul egy  $1 \times 1$ -es téglalap;
- betli rövid diszjunktív változat  $\text{LEGO}_\oplus$ : egy lépésben csak egy téglalapra tehetünk építőkockát; a játék akkor ér véget, amint kialakul egy  $1 \times 1$ -es téglalap;
- betli rövid konjunktív változat  $\text{LEGO}_\wedge$  egyszerre minden téglalapra kell építőkockát tenni; a játék akkor ér véget, amint kialakul egy  $1 \times 1$ -es téglalap;
- betli hosszú konjunktív változat  $\text{LEGO}_\Delta$ : egyszerre minden téglalapra kell építőkockát tenni; a játék ér véget, amikor csupa  $1 \times 1$ -es téglalapok vannak;
- betli rövid szelektív változat  $\text{LEGO}_\nabla$  tetszőleges számú téglalapra tehetünk építőköveket; a játék akkor ér véget, amint kialakul egy  $1 \times 1$ -es téglalap.

Mindegyik változatot játszhatjuk úgy is, hogy korlátozzuk az építmény magasságát, vagyis az egymásra helyezhető rétegek számát; ezzel végtelen sok különböző

variánst kapunk. Jelöljön  $(a, b)_r$  olyan  $a \times b$  méretű téglalapot, amelyre még  $r$  réteget rakhatunk, megengedve az  $r = \infty$  esetet is. Ha  $r \geq 1$ , akkor az  $(a, b)_r$  állásból a következő állásokba léphetünk:

$$\begin{aligned} &((a_1, b)_r, (a_2, b)_{r-1}), \text{ ahol } a_1 + a_2 = a, \\ &((a, b_1)_r, (a, b_2)_{r-1}), \text{ ahol } b_1 + b_2 = b. \end{aligned}$$

A játék állásai téglalaprendszerek (lásd [4] A. Függelékét), tehát egy tetszőleges  $p$  állás a következőképpen írható le:

$$p = ((a_1, b_1)_{r_1}, (a_2, b_2)_{r_2}, \dots, (a_k, b_k)_{r_k}). \quad (4.1)$$

A 2.4. Tétel szerint a  $\text{LEGO}_+$  játékban  $G^+(p)$  értéke az egyes téglalapok  $G^+$ -értékeinek nim-összege:

$$G^+(p) = G^+((a_1, b_1)_{r_1}) \oplus G^+((a_2, b_2)_{r_2}) \oplus \dots \oplus G^+((a_k, b_k)_{r_k}).$$

A  $\text{LEGO}_\oplus$  játék vizsgálatához először meg kell határozni az  $N$  és  $E$  halmazokat. Az  $(a, b)_0$  alakú állások végállások, csakúgy, mint az  $(1, 1)_r$  alakúak. Rövid kompozícióról lévén szó végállás lesz minden olyan állás is, amely tartalmaz ilyen típusú téglalapot. Ebből következik, hogy  $(a, b)_1 \in E$ , ha  $a > 1$  vagy  $b > 1$ , mert ilyen állásból lehet  $(a', b')_0$  típusú téglalapot tartalmazó állásba lépni. Az  $(1, b)_r$  és  $(a, 1)_r$  állások szintén  $E$ -ben vannak, mert ezekből tudunk úgy lépni, hogy  $1 \times 1$ -es téglalap alakuljon ki. Továbbá  $E$ -ben vannak mindazok az állások, amelyekben fellép ezen három típusú téglalap valamelyike. Tehát a (4.1)-beli  $p$  állás akkor és csak akkor eleme  $P \setminus (N \cup E)$  halmaznak, ha  $a_i, b_i, r_i \geq 2$  minden  $i$ -re. Ekkor a 2.10. Tétel szerint  $F^+(p)$  értéke az egyes téglalapok  $F^+$ -értékeinek nim-összege:

$$F^+(p) = F^+((a_1, b_1)_{r_1}) \oplus F^+((a_2, b_2)_{r_2}) \oplus \dots \oplus F^+((a_k, b_k)_{r_k}).$$

A  $\text{LEGO}_\wedge$ ,  $\text{LEGO}_\vee$ ,  $\text{LEGO}_\nabla$  játékok esetén a következő képletekkel számolható ki a Kalmár–Steinhaus-függvény (lásd a 2.13., 2.20., 2.26. Tételt):

$$\begin{aligned} R^+(p) &= R^+((a_1, b_1)_{r_1}) \wedge R^+((a_2, b_2)_{r_2}) \wedge \dots \wedge R^+((a_k, b_k)_{r_k}), \\ R^+(p) &= R^+((a_1, b_1)_{r_1}) \boxplus R^+((a_2, b_2)_{r_2}) \boxplus \dots \boxplus R^+((a_k, b_k)_{r_k}), \\ R^+(p) &= R^+((a_1, b_1)_{r_1}) \nabla R^+((a_2, b_2)_{r_2}) \nabla \dots \nabla R^+((a_k, b_k)_{r_k}). \end{aligned}$$

A  $\text{LEGO}_\Delta$  játékban is elegendő ismerni a Conway-függvény értékeit az egyes téglalapokon (lásd a 2.16. Tételt):

$$S^+(p) = S^+((a_1, b_1)_{r_1}) \vee S^+((a_2, b_2)_{r_2}) \vee \dots \vee S^+((a_k, b_k)_{r_k}).$$

A betli  $\text{LEGO}_\oplus$  játék esetén az  $F^-(p)$  érték akkor értelmezett, ha minden  $i$ -re  $r_i \geq 1$  és  $(a_i, b_i) \neq (1, 1)$ ; ekkor a 3.16. Tétel alapján

$$F^-(p) = F^-((a_1, b_1)_{r_1}) \oplus F^-((a_2, b_2)_{r_2}) \oplus \dots \oplus F^-((a_k, b_k)_{r_k}).$$

A betli  $\text{LEGO}_\wedge$  és  $\text{LEGO}_\vee$  játékoknál a 3.18. és 3.26. Tétel szerint a betli Kalmár–Steinhaus-függvények a következők:

$$\begin{aligned} R^-(p) &= R^-((a_1, b_1)_{r_1}) \wedge R^-((a_2, b_2)_{r_2}) \wedge \cdots \wedge R^-((a_k, b_k)_{r_k}), \\ R^-(p) &= R^-((a_1, b_1)_{r_1}) \blacktriangledown R^-((a_2, b_2)_{r_2}) \blacktriangledown \cdots \blacktriangledown R^-((a_k, b_k)_{r_k}). \end{aligned}$$

A betli  $\text{LEGO}_\Delta$  játékban a 3.21. Tételből kapjuk az alábbi képletet a betli Conway-függvényre:

$$S^-(p) = S^-((a_1, b_1)_{r_1}) \vee S^-((a_2, b_2)_{r_2}) \vee \cdots \vee S^-((a_k, b_k)_{r_k}).$$

Eddig azt mutattuk meg, hogy elég az  $(a, b)_r$  állásokra ismerni a megfelelő függvények értékét. A következőkben rekurziókat adunk meg, amelyekkel kiszámolhatjuk ezeket az értékeket. Az  $(a, b)_0$  alakú állások végállások, ezért  $G^+((a, b)_0) = R^+((a, b)_0) = S^+((a, b)_0) = 0$ , illetve a  $\text{LEGO}_\oplus$  játék esetén pedig  $F^+((a, b)_2) = 0$  (ha  $a, b \geq 2$ ). A nagyobb  $r$  értékekre a következőképpen számolhatók ki a megfelelő függvényértékek.

A  $\text{LEGO}_+$  játék Sprague–Grundy-függvénye a 1.5. Definíció szerint

$$G_r^+(a, b) := G^+((a, b)_r) = \text{mex}(H_1 \cup H_2), \quad (4.2)$$

ahol

$$\begin{aligned} H_1 &= \{G_r^+(a_1, b) \oplus G_{r-1}^+(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és} \\ H_2 &= \{G_r^+(a, b_1) \oplus G_{r-1}^+(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \end{aligned}$$

A  $\text{LEGO}_\oplus$  játék rövidre zárt Sprague–Grundy-függvénye ( $r \geq 3$  esetén)

$$F_r^+(a, b) = F^+((a, b)_r) = \text{mex}(H_1 \cup H_2), \quad (4.3)$$

ahol

$$\begin{aligned} H_1 &= \{F_r^+(a_1, b) \oplus F_{r-1}^+(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a \text{ és } a_1 \neq 1, a_2 \neq 1\} \text{ és} \\ H_2 &= \{F_r^+(a, b_1) \oplus F_{r-1}^+(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b \text{ és } b_1 \neq 1, b_2 \neq 1\}. \end{aligned}$$

A  $\text{LEGO}_\wedge$  játék esetén a Kalmár–Steinhaus-függvény pedig a következőképpen alakul:

$$R_r^+(a, b) = R^+((a, b)_r) = 1 + \text{lego}(H_1 \cup H_2), \quad (4.4)$$

ahol

$$\begin{aligned} H_1 &= \{R_r^+(a_1, b) \wedge R_{r-1}^+(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és} \\ H_2 &= \{R_r^+(a, b_1) \wedge R_{r-1}^+(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}, \end{aligned}$$

Ezzel analóg módon írhatjuk fel a Conway-függvényt a  $\text{LEGO}_\Delta$  játéokra:

$$S_r^+(a, b) = S^+((a, b)_r) = 1 + \text{gelo}(H_1 \cup H_2), \quad (4.5)$$

ahol

$$H_1 = \{S_r^+(a_1, b) \vee S_{r-1}^+(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{S_r^+(a, b_1) \vee S_{r-1}^+(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}.$$

A hosszú szelektív  $\text{LEGO}_\vee$  változatnál a Kalmár–Steinhaus-függvény pedig a következő:

$$R_r^+(a, b) = R^+((a, b)_r) = 1 + \text{lego}(H_1 \cup H_2), \quad (4.6)$$

ahol

$$H_1 = \{R_r^+(a_1, b) \boxplus R_{r-1}^+(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{R_r^+(a, b_1) \boxplus R_{r-1}^+(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\},$$

illetve  $\text{LEGO}_\nabla$  esetén

$$R_r^+(a, b) = R^+((a, b)_r) = 1 + \text{lego}(H_1 \cup H_2), \quad (4.7)$$

ahol

$$H_1 = \{R_r^+(a_1, b) \nabla R_{r-1}^+(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{R_r^+(a, b_1) \nabla R_{r-1}^+(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}.$$

A betli  $\text{LEGO}_\oplus$  játék betli rövidre zárt Sprague–Grundy-függvénye ( $r \geq 2$  esetén)

$$F_r^-(a, b) = F^-((a, b)_r) = \text{mex}(H_1 \cup H_2), \quad (4.8)$$

ahol

$$H_1 = \{F_r^-(a_1, b) \oplus F_{r-1}^-(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a \text{ és } (a_1, b) \neq (1, 1), (a_2, b) \neq (1, 1)\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{F_r^-(a, b_1) \oplus F_{r-1}^-(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b \text{ és } (a, b_1) \neq (1, 1), (a, b_2) \neq (1, 1)\}.$$

A betli  $\text{LEGO}_\wedge$  játék esetén a betli Kalmár–Steinhaus-függvény pedig a következőképpen alakul:

$$R_r^-(a, b) = R^-((a, b)_r) = 1 + \text{loge}(H_1 \cup H_2), \quad (4.9)$$

ahol

$$H_1 = \{R_r^-(a_1, b) \wedge R_{r-1}^-(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{R_r^-(a, b_1) \wedge R_{r-1}^-(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}.$$

Ezzel analóg módon írhatjuk fel a betli Conway-függvényt a betli  $\text{LEGO}_\Delta$  játékra:

$$S_r^-(a, b) = S^-((a, b)_r) = 1 + \text{gole}(H_1 \cup H_2), \quad (4.10)$$

ahol

$$H_1 = \{S_r^-(a_1, b) \vee S_{r-1}^-(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{S_r^-(a, b_1) \vee S_{r-1}^-(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}.$$

A betli  $\text{LEGO}_\nabla$  esetén

$$R_r^-(a, b) = R^-((a, b)_r) = 1 + \log_e(H_1 \cup H_2), \quad (4.11)$$

ahol

$$\begin{aligned} H_1 &= \{R_r^-(a_1, b) \blacktriangledown R_{r-1}^-(a_2, b) \mid a_1 + a_2 = a\} \text{ és} \\ H_2 &= \{R_r^-(a, b_1) \blacktriangledown R_{r-1}^-(a, b_2) \mid b_1 + b_2 = b\}. \end{aligned}$$

Ha nem korlátozzuk az építmény magasságát, akkor egyszerűbb dolgunk van, mert csak egy függvénnyel kell dolgoznunk, hiszen ebben az esetben  $r = r - 1 = \infty$ .

A felírt rekurziókat *Mathematica* segítségével kiszámoltuk, ezen programrészletek illetve a jó állások táblázatai megtalálhatóak a Függelékben.

# Függelék

## A. 0,123 oktális játék

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	1	2	2	0	0	1	1	2	0
1	0	1	0	3	3	1	1	0	0	3	1
2	1	0	1	2	2	0	0	1	1	2	0
3	2	3	2	0	0	<b>3</b>	<b>2</b>	2	4	0	3
4	2	3	2	0	0	3	2	2	4	0	3
5	0	1	0	3	3	1	1	0	0	3	1

1. táblázat

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	0	2	2	3	3	4	4	4	5
1	1	2	1	2	2	<b>2</b>	<b>4</b>	5	5	6	6
2	0	1	0	2	2	3	3	4	4	4	5
3	2	2	2	3	3	4	4	4	6	7	6
4	2	2	2	3	3	4	4	4	6	7	6
5	3	2	3	4	4	4	4	5	7	6	6

2. táblázat

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	0	2	2	1	3	2	4	4	3
1	1	2	1	2	2	2	4	3	3	4	4
2	0	1	0	2	2	1	3	2	4	4	3
3	2	<b>2</b>	2	3	3	<b>4</b>	4	4	4	5	4
4	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	4
5	1	2	1	4	4	2	4	3	3	6	4

3. táblázat

## B. LEGO<sub>+</sub>

Definiáljuk a mex műveletet:

```
mex[list_] :=  
Module[{m, list0 = list, telj},  
  m = Max[list0];  
  telj = Table[i, {i, 0, m + 1, 1}];  
  Min[Complement[tej, list0]]  
]
```

A 4.fejezet (4.2) képlete által definiált  $G_r^+$  függvény  $r = \infty$  esetén

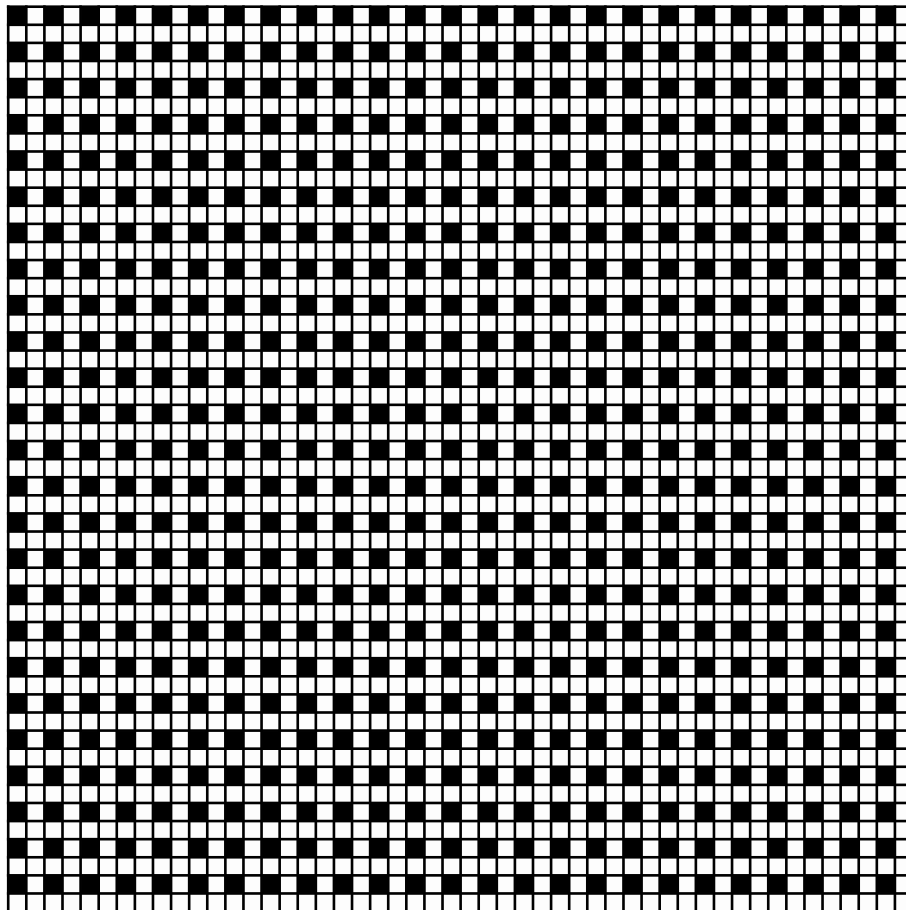
```
g[1, 1] := 0  
g[a_, b_] :=  
Module[  
  {a0 = a, b0 = b, r0 = r, H1, H2, a1, b1, unio},  
  H1 = Table[BitXor[g[a1, b0], g[a0 - a1, b0]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];  
  H2 = Table[BitXor[g[a0, b1], g[a0, b0 - b1]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];  
  unio = Join[H1, H2];  
  g[a0, b0] = mex[unio]  
]
```

A  $G_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata (feketével jelöljük a jó állásokat, fehérrel pedig a rossz állásokat; az (1,1) állás a bal felső sarokban található):

```
Table[g[a, b], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm  
ArrayPlot[Table[g[a, b], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],  
  ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &), ColorFunctionScaling -> False,  
  Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4. táblázat



4. ábra



A (4.2) képlet az  $r \leq \infty$  helyen

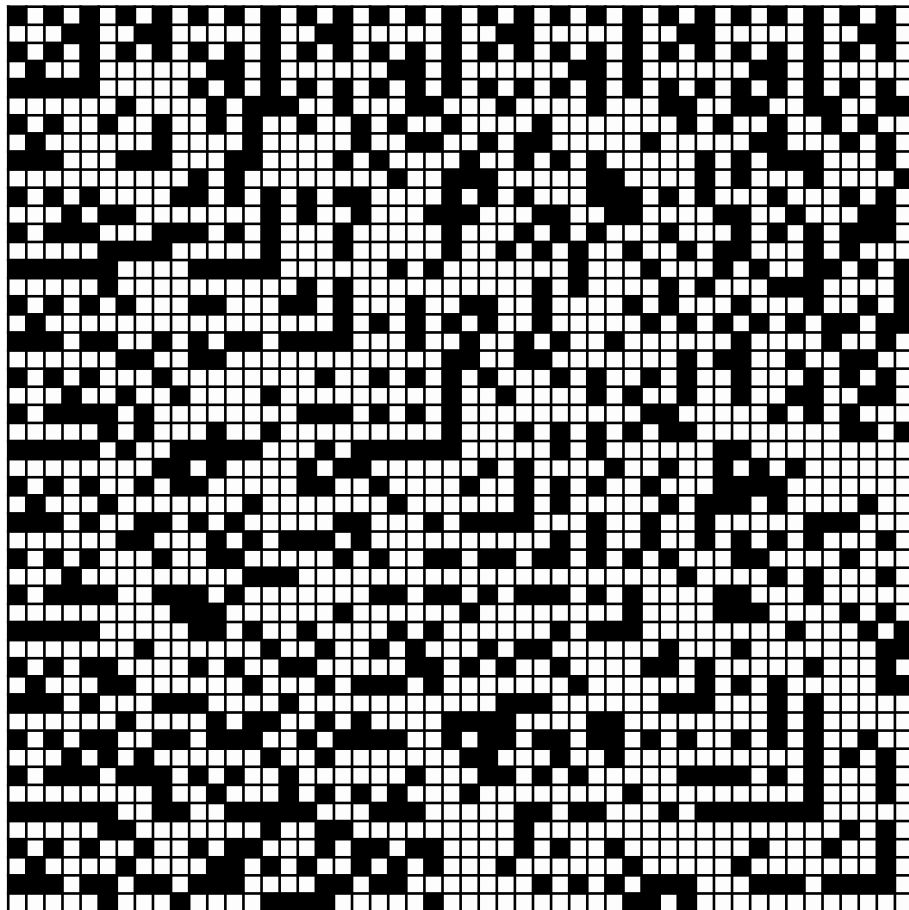
```
g[a_, b_, 1] := BitXor[a - 1, b - 1]
g[1, 1, r_] := 0
g[a_, b_, r_] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, r0 = r, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[g[a1, b0, r0], g[a0 - a1, b0, r0 - 1]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[BitXor[g[a0, b1, r0], g[a0, b0 - b1, r0 - 1]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  g[a0, b0, r0] = mex[unio]
]
```

Példát az  $r = 2$  esetben adunk, azaz a  $G_2^+$  függvény értékeit, illetve a játék jó állásainak halmazát ábrázoljuk:

```
Table[g[a, b, 2], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[g[a, b, 2], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &), ColorFunctionScaling -> False,
  Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	3	0	0	2	2	0	0	2
3	0	3	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	0	1	1	0	1	3	2	2	3
5	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5
6	1	2	1	1	1	1	0	1	2	3
7	0	2	0	3	2	0	1	4	0	1
8	1	0	1	2	3	1	4	1	0	2
9	0	0	0	2	4	2	0	0	0	1
10	1	2	1	3	5	3	1	2	1	1

5. táblázat



5. ábra

## C. LEGO $\oplus$

A 4. fejezet (4.3) képlete által definiált  $F_r^+$  függvény  $r = \infty$  esetén ( $F^+$  nem értelmezett helyein Null található):

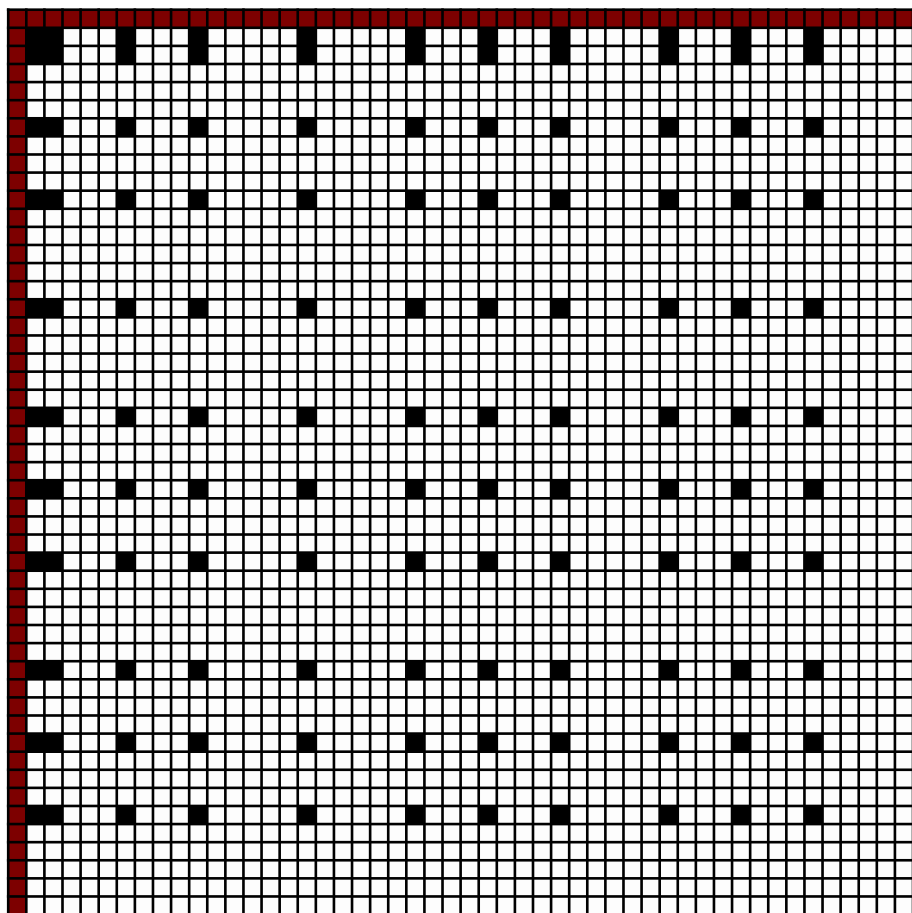
```
finf[{1, b_}] := Null
finf[{a_, 1}] := Null
finf[{2, 2}] := 0
finf[{2, 3}] := 0
finf[{3, 2}] := 0
finf[{3, 3}] := 0
finf[{a_, b_}] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[finf[{a1, b0}], finf[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 2, a0 - 2, 1}];
  H2 = Table[BitXor[finf[{a0, b1}], finf[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 2, b0 - 2, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  finf[{a0, b0}] = mex[unio]
]
```

Az  $F_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata (6. táblázat), és a jó állások táblázata (6. ábra, feketével jelöltük a jó állásokat, fehérrel pedig a rossz állásokat):

```
Table[finf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[finf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &), ColorFunctionScaling -> False,
  Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null
2	Null	0	0	1	1	2	0	3	1	1
3	Null	0	0	1	1	2	0	3	1	1
4	Null	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	Null	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	Null	2	2	1	1	1	2	1	1	1
7	Null	0	0	1	1	2	0	3	1	1
8	Null	3	3	1	1	1	3	1	1	1
9	Null	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	Null	1	1	1	1	1	1	1	1	1

6. táblázat



6. ábra

Az  $F_r^+$  függvény bármely  $3 \leq r \leq \infty$  esetén:

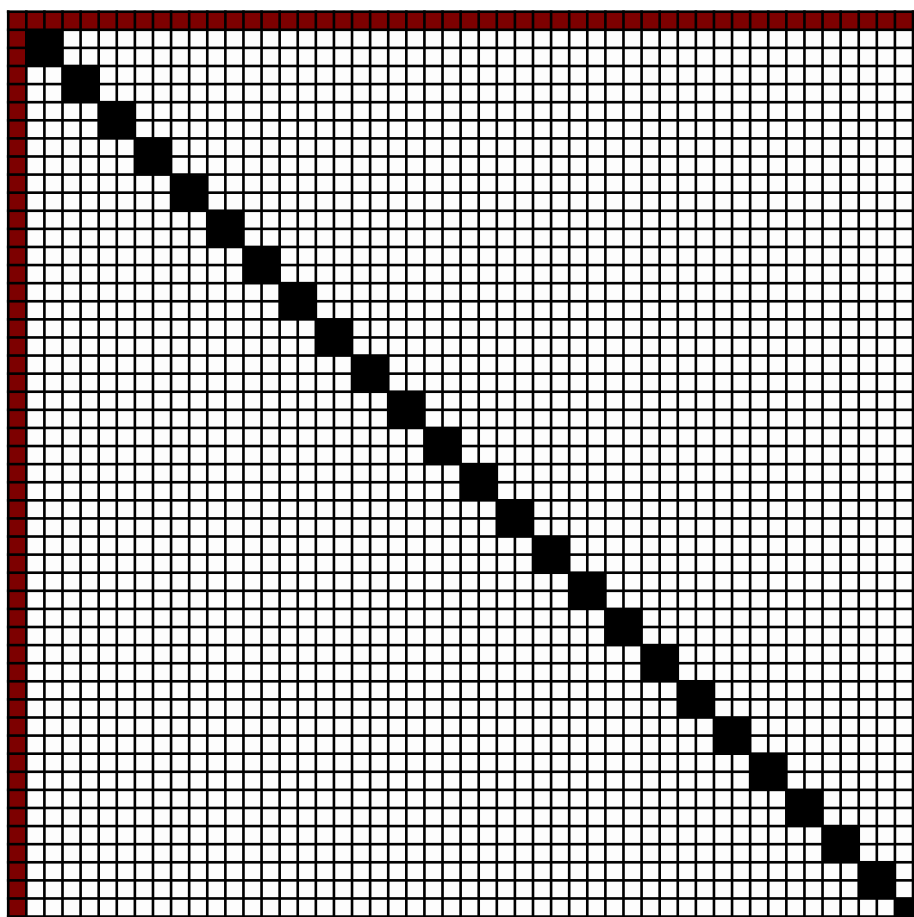
```
f[{a_, b_, 2} /; a > 1 && b > 1] := 0
f[{1, b_, r_} /; r > 1] := Null
f[{a_, 1, r_} /; r > 1] := Null
f[{2, 2, r_}] := 0
f[{2, 3, r_}] := 0
f[{3, 2, r_}] := 0
f[{3, 3, r_}] := 0
f[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, r0 = r, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[f[{a1, b0, r0}], f[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 2, a0 - 2, 1}];
  H2 = Table[BitXor[f[{a0, b1, r0}], f[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 2, b0 - 2, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  f[{a0, b0, r0}] = mex[unio]
]
```

Az  $F_3^+$  függvény értékeinek és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[f[{a, b, 3}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[f[{a, b, 3}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &), ColorFunctionScaling -> False,
  Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null
2	Null	0	0	1	1	2	2	3	3	4
3	Null	0	0	1	1	2	2	3	3	4
4	Null	1	1	0	0	3	3	2	2	5
5	Null	1	1	0	0	3	3	2	2	5
6	Null	2	2	3	3	0	0	1	1	6
7	Null	2	2	3	3	0	0	1	1	6
8	Null	3	3	2	2	1	1	0	0	7
9	Null	3	3	2	2	1	1	0	0	7
10	Null	4	4	5	5	6	6	7	7	0

7. táblázat



7. ábra

## D. LEGO<sub>∧</sub>

Definiáljuk a lego műveletet:

```
lego[list_] :=  
Module[{list0 = list, l},  
  l = Select[list0, EvenQ];  
  If[Length[l] == 0, Max[list0], Min[l]]  
]
```

A (4.4) képlet alapján  $R_r^+$  a következő:

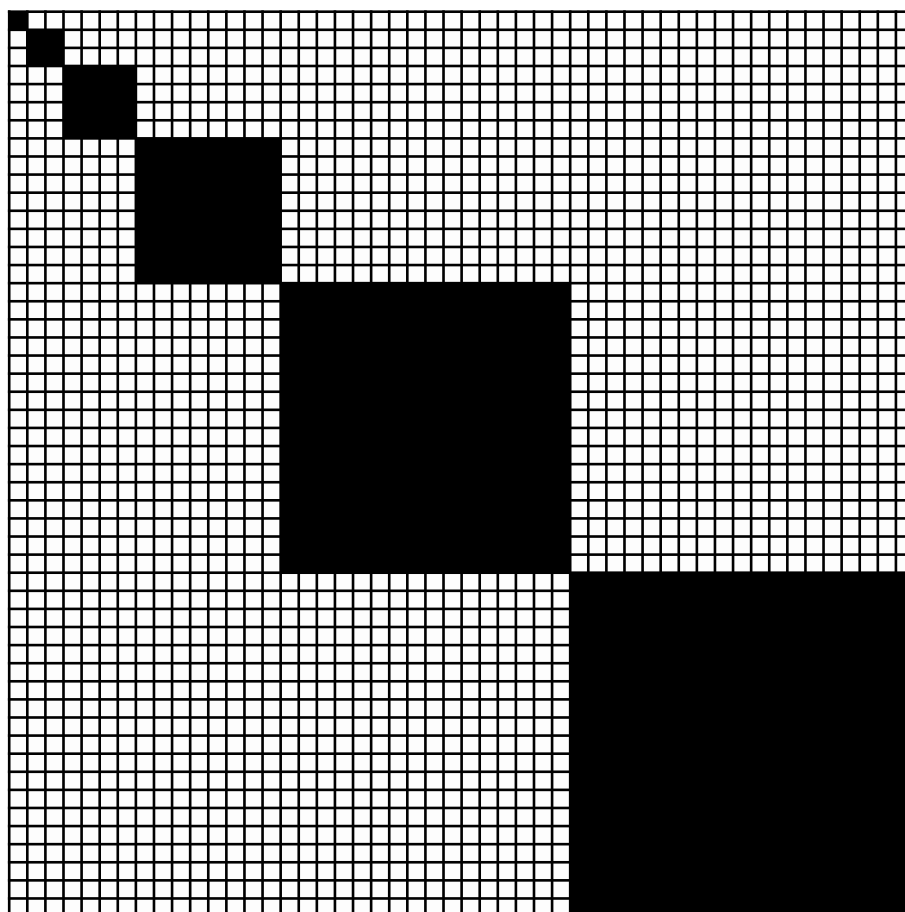
```
rinf[{1, 1}] := 0  
rinf[{a_, b_}] :=  
Module[  
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},  
  H1 = Table[Min[rinf[{a1, b0}], rinf[{a0 - a1, b0}]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];  
  H2 = Table[Min[rinf[{a0, b1}], rinf[{a0, b0 - b1}]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];  
  unio = Join[H1, H2];  
  rinf[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]  
]
```

Az  $R_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata, illetve a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[rinf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm  
ArrayPlot[Table[rinf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],  
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),  
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3
3	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	3	4	4	4	4	5	5	5
5	1	3	3	4	4	4	4	5	5	5
6	1	3	3	4	4	4	4	5	5	5
7	1	3	3	4	4	4	4	5	5	5
8	1	3	3	5	5	5	5	6	6	6
9	1	3	3	5	5	5	5	6	6	6
10	1	3	3	5	5	5	5	6	6	6

8. táblázat



8. ábra



Az  $R_r^+$  függvény bármely  $r \leq \infty$  esetén:

```

r2[{a_, b_, 1} /; a == b] := r2[{a, b, 1}] = 2 a - 2
r2[{a_, b_, 1} /; a < b] := r2[{a, b, 1}] = 2 a - 1
r2[{a_, b_, 1}] := r2[{a, b, 1}] = 2 b - 1
r2[{1, 1, r_}] := 0
r2[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[Min[r2[{a1, b0, r0}], r2[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Min[r2[{a0, b1, r0}], r2[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  r2[{a0, b0, r0}] = 1 + lego[unio]
]

```

Az  $R_2^+$  függvény értékeinek táblázata és a játék jó állásainak táblázata:

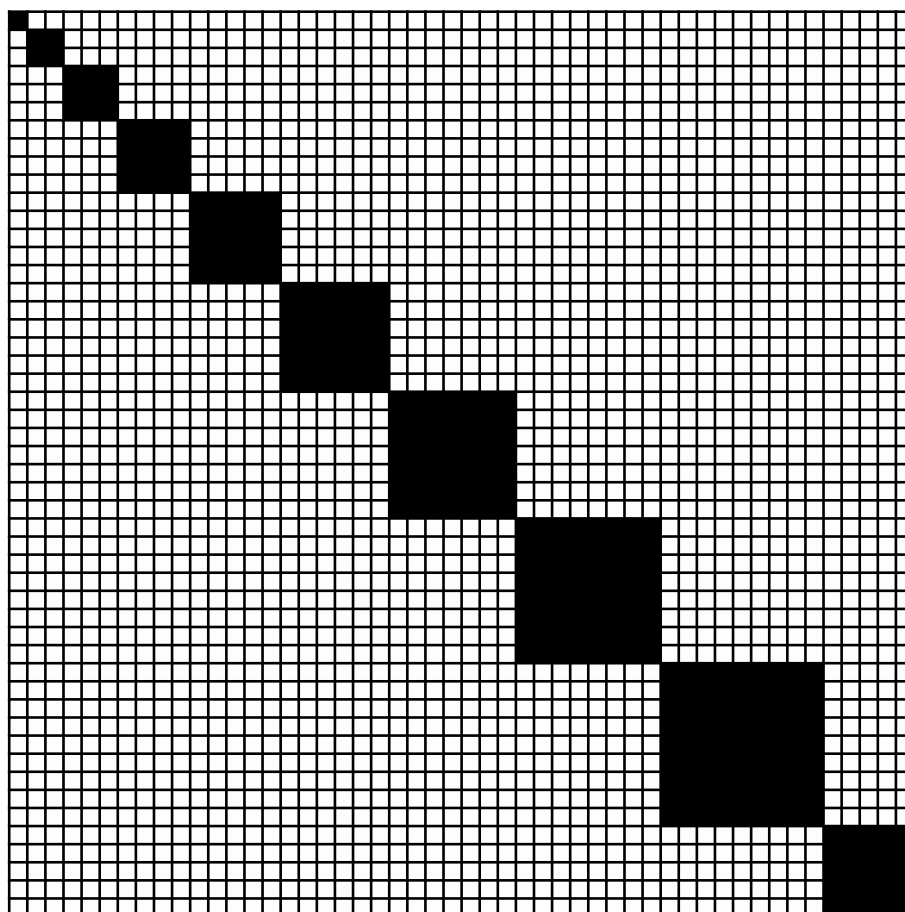
```

Table[r2[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[r2[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3
3	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	3	4	4	4	5	5	5	5
5	1	3	3	4	4	4	5	5	5	5
6	1	3	3	4	4	4	5	5	5	5
7	1	3	3	5	5	5	6	6	6	6
8	1	3	3	5	5	5	6	6	6	6
9	1	3	3	5	5	5	6	6	6	6
10	1	3	3	5	5	5	6	6	6	6

9. táblázat



9. ábra

## E. LEGO<sub>△</sub>

Definiáljuk a gelo műveletet:

```
gelo[list_] :=  
Module[{list0 = list, l},  
  l = Select[list0, EvenQ];  
  If[Length[l] == 0, Min[list0], Max[l]]  
]
```

A 4. fejezet képlete által definiált  $S_r^+$  függvény  $r = \infty$  esetén:

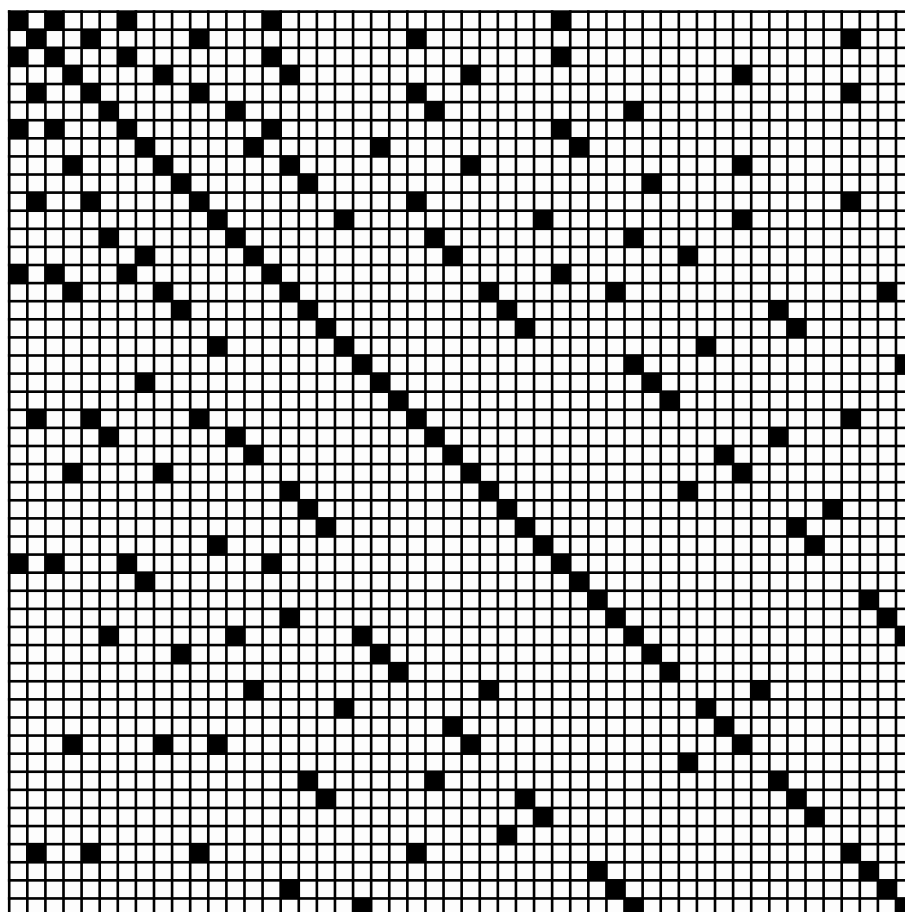
```
sinf[{1, 1}] := 0  
sinf[{a_, b_}] :=  
Module[  
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},  
  H1 = Table[Max[sinf[{a1, b0}], sinf[{a0 - a1, b0}]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];  
  H2 = Table[Max[sinf[{a0, b1}], sinf[{a0, b0 - b1}]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];  
  unio = Join[H1, H2];  
  sinf[{a0, b0}] = 1 + gelo[unio]  
]
```

Az  $S_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[sinf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm  
ArrayPlot[Table[sinf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],  
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),  
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	3	3	4	5	5	5
2	1	2	3	3	4	5	5	5	5	5
3	2	3	4	5	5	5	6	7	7	7
4	3	3	5	4	5	5	7	5	6	7
5	3	4	5	5	6	7	7	7	7	7
6	3	5	5	5	7	6	7	7	7	7
7	4	5	6	7	7	7	8	9	9	9
8	5	5	7	5	7	7	9	6	7	7
9	5	5	7	6	7	7	9	7	8	9
10	5	5	7	7	7	7	9	7	9	8

10. táblázat



10. ábra

Az  $S_r^+$  függvény bármely  $r \leq \infty$  esetén:

```

s[{1, 1, r_}] := 0
s[{1, b_, 1} /; b ≥ 2] := s[{1, b, 1}] = 1
s[{a_, 1, 1} /; a ≥ 2] := s[{a, 1, 1}] = 1
s[{a_, b_, 1} /; a == b] := s[{a, b, 1}] = 2
s[{a_, b_, 1}] := s[{a, b, 1}] = 3
s[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[Max[s[{a1, b0, r0}], s[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Max[s[{a0, b1, r0}], s[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  s[{a0, b0, r0}] = 1 + gelo[unio]
]

```

Az  $S_2^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

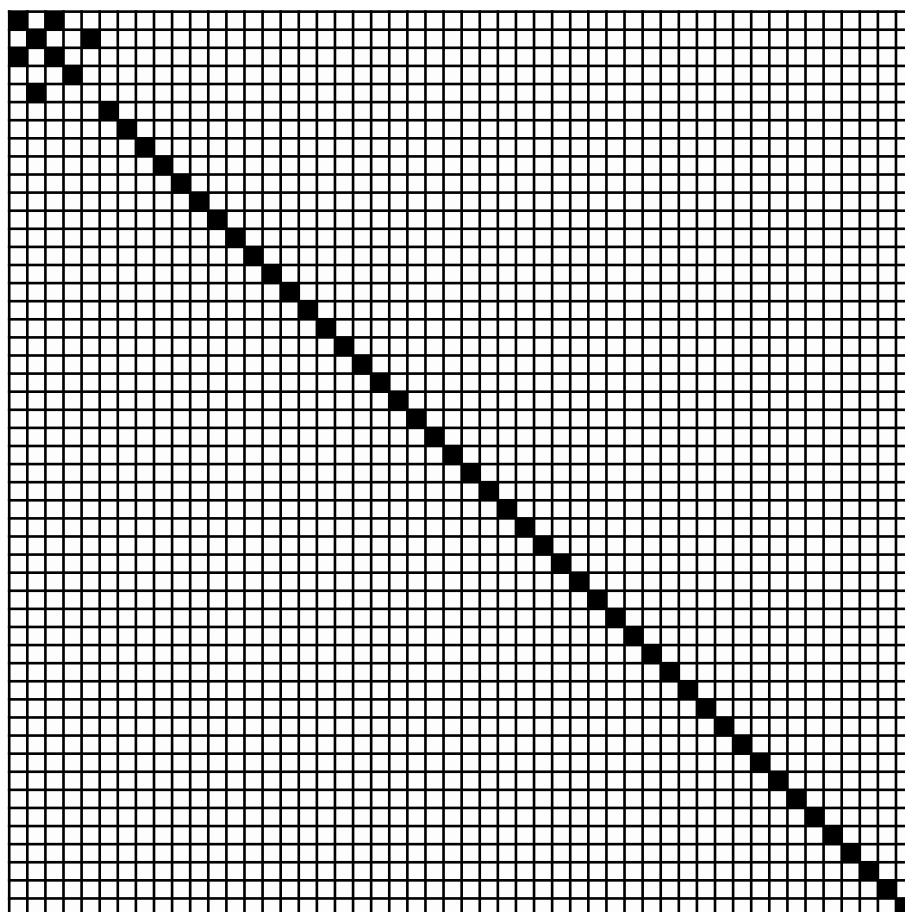
```

Table[s[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[s[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3
2	1	2	3	3	4	5	5	5	5	5
3	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5
4	3	3	5	4	5	5	5	5	5	5
5	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
6	3	5	5	5	5	4	5	5	5	5
7	3	5	5	5	5	5	4	5	5	5
8	3	5	5	5	5	5	5	4	5	5
9	3	5	5	5	5	5	5	5	4	5
10	3	5	5	5	5	5	5	5	5	4

11. táblázat



11. ábra

## F. LEGO<sub>V</sub>

Definiáljuk a  $\boxplus$  műveletet:

```
d[x_, y_] := d[x, y] = x + y - Mod[x, 2] Mod[y, 2]
```

A (4.6) képlet által definiált  $R_r^+$  függvény  $r = \infty$  esetén:

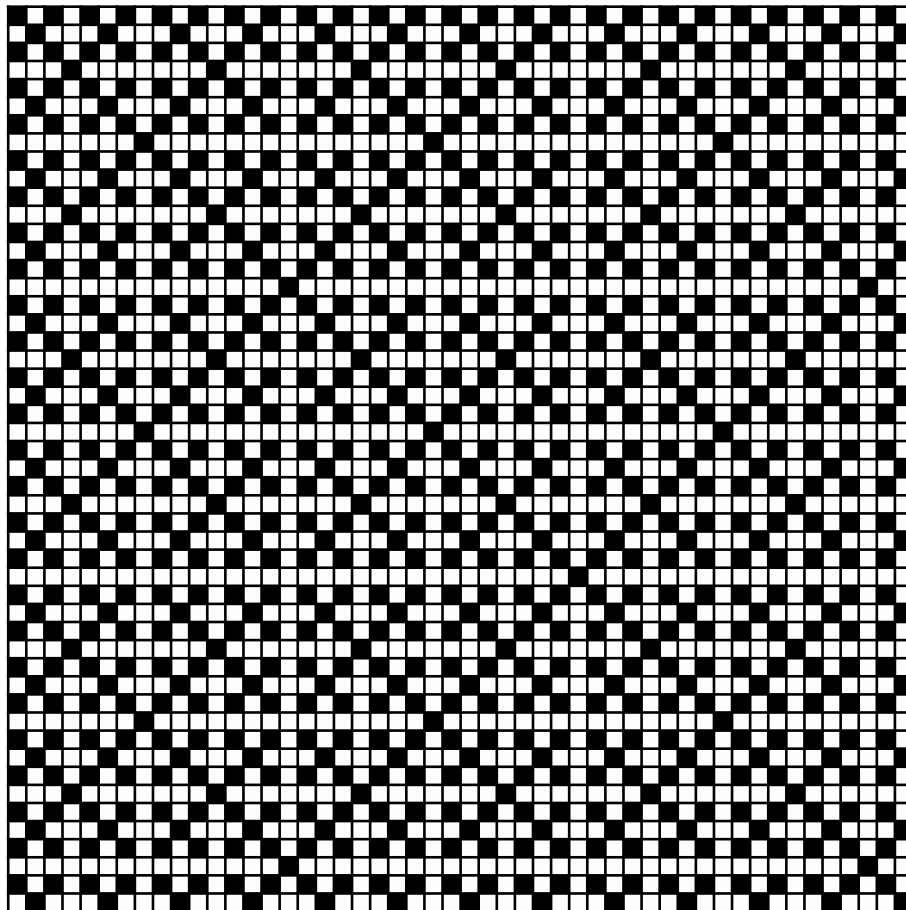
```
rinf[{1, 1}] := 0
rinf[{a_, b_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},
  H1 = Table[d[rinf[{a1, b0}], rinf[{a0 - a1, b0}]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[d[rinf[{a0, b1}], rinf[{a0, b0 - b1}]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  rinf[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]
]
```

Az  $R_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[rinf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Evaluate[Table[rinf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}]],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	5	5	9	10	13	13	17	18
3	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
4	3	5	11	14	19	21	27	29	35	37
5	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49
6	5	10	17	21	29	34	41	45	53	58
7	6	13	20	27	34	41	48	55	62	69
8	7	13	23	29	39	45	55	62	71	77
9	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89
10	9	18	29	37	49	58	69	77	89	98

12. táblázat



12. ábra



Az  $R_r^+$  függvény bármely  $r \leq \infty$  esetén:

```

rr[{a_, b_, 1} /; a == b] := rr[{a, b, 1}] = 2 a - 2
rr[{a_, b_, 1} /; a < b] := rr[{a, b, 1}] = 2 a - 1
rr[{a_, b_, 1}] := rr[{a, b, 1}] = 2 b - 1
rr[{1, 1, r_}] := 0
rr[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[d[rr[{a1, b0, r0}], rr[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[d[rr[{a0, b1, r0}], rr[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  rr[{a0, b0, r0}] = 1 + lego[unio]
]

```

Az  $R_2^+$  függvény értékeinek táblázata és a játék jó állásainak táblázata (13. ábra):

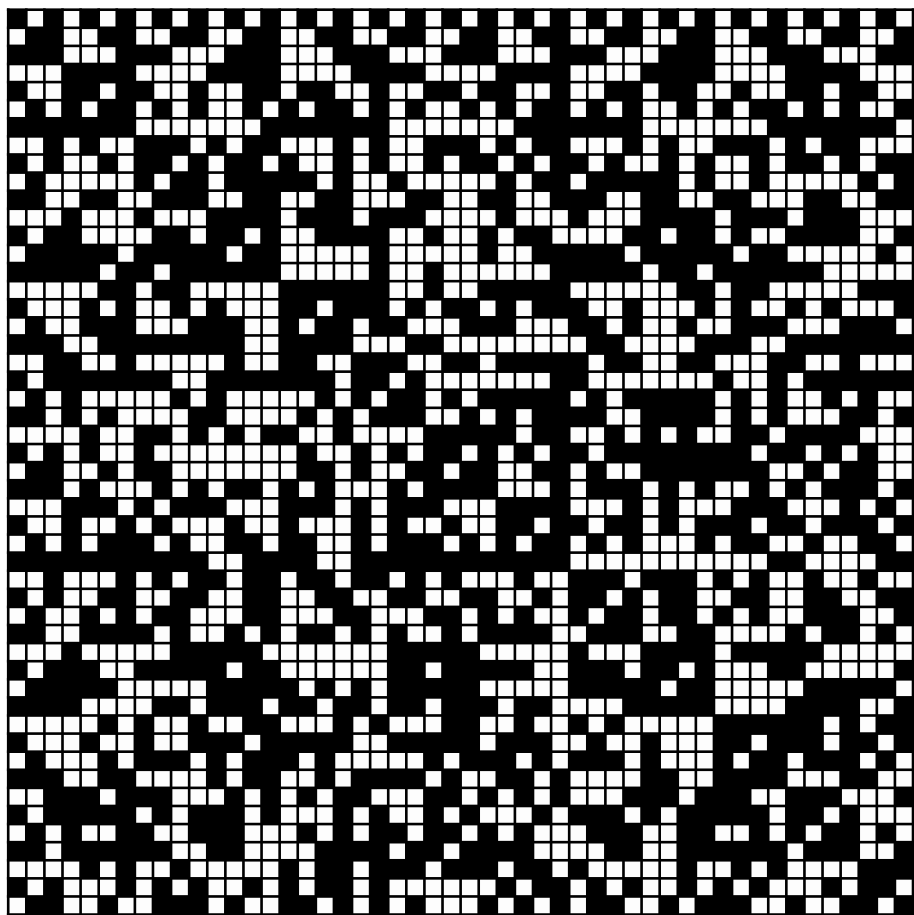
```

Table[rr[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Evaluate[Table[rr[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}]],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14
3	2	4	6	7	9	11	12	14	16	17
4	3	5	7	8	10	12	14	15	17	19
5	4	7	9	10	12	13	16	18	19	21
6	5	8	11	12	13	16	18	19	22	23
7	6	10	12	14	16	18	20	19	23	25
8	7	11	14	15	18	19	19	24	26	28
9	8	13	16	17	19	22	23	26	28	25
10	9	14	17	19	21	23	25	28	25	32

13. táblázat



13. ábra

## G. LEGO $\nabla$

Definiáljuk a  $\nabla$  műveletet:

```
h[x_, y_] :=  
Piecewise[  
  {{0, x == 0 || y == 0},  
   {1, ((x == 1 && x != 0) || (y == 1 && y != 0))},  
   {x + y - 2, Mod[x, 2] Mod[y, 2] == 0},  
   {x + y - 3, Mod[x, 2] Mod[y, 2] == 1}  
}]
```

A (4.7) képlet által definiált  $R_r^+$  függvény  $r = \infty$  esetén:

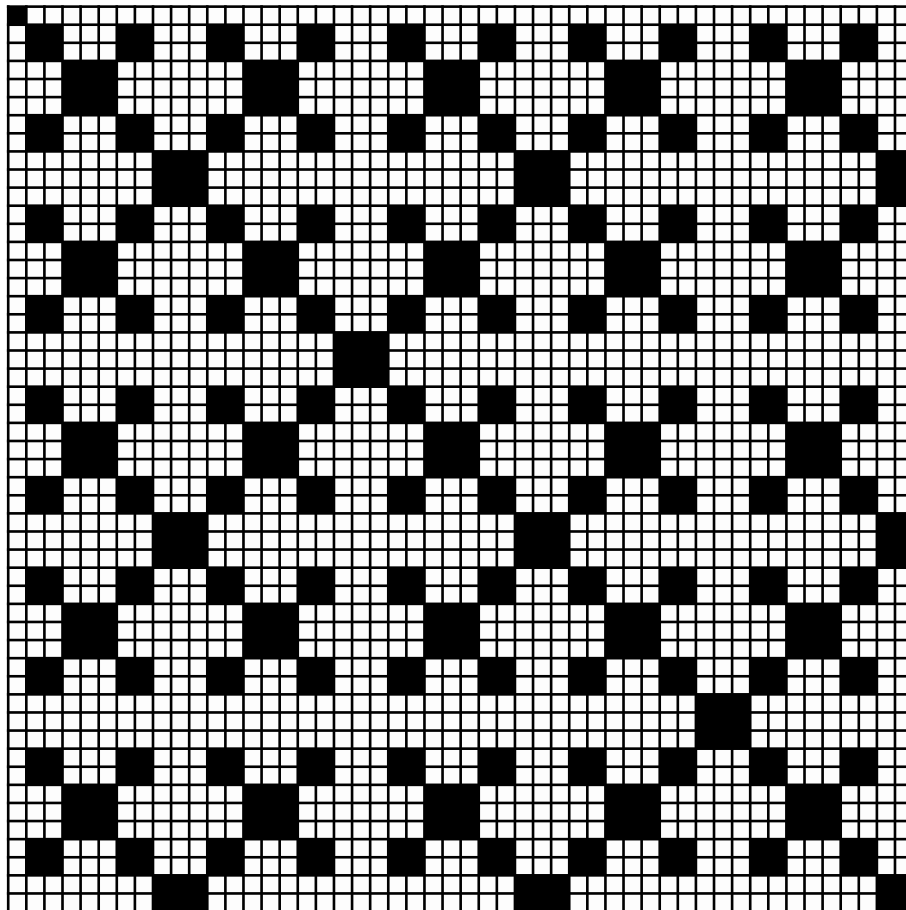
```
rrinf[{1, 1}] := 0  
rrinf[{a_, b_}] :=  
Module[  
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},  
  H1 = Table[h[rrinf[{a1, b0}], rrinf[{a0 - a1, b0}]], {a1, 1, a0 - 1, 1}];  
  H2 = Table[h[rrinf[{a0, b1}], rrinf[{a0, b0 - b1}]], {b1, 1, b0 - 1, 1}];  
  unio = Join[H1, H2];  
  rrinf[{a0, b0}] = 1 + lego[unio]  
]
```

Az  $R_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[rrinf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm  
ArrayPlot[Evaluate[Table[rrinf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}]],  
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),  
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5
3	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5
4	1	3	3	4	4	6	7	7	7	7
5	1	3	3	4	4	6	7	7	7	7
6	1	3	3	6	6	8	7	7	11	11
7	1	4	4	7	7	7	10	12	13	13
8	1	4	4	7	7	7	12	12	15	15
9	1	5	5	7	7	11	13	15	16	18
10	1	5	5	7	7	11	13	15	18	18

14. táblázat



14. ábra

Az  $R_r^+$  függvény bármely  $r \leq \infty$  esetén:

```

rr[{a_, b_, 1} /; a == b] := rr[{a, b, 1}] = 2 a - 2
rr[{a_, b_, 1} /; a < b] := rr[{a, b, 1}] = 2 a - 1
rr[{a_, b_, 1}] := rr[{a, b, 1}] = 2 b - 1
rr[{1, 1, r_}] := 0
rr[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[h[rr[{a1, b0, r0}], rr[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[h[rr[{a0, b1, r0}], rr[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  rr[{a0, b0, r0}] = 1 + lego[unio]
]

```

Az  $R_2^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

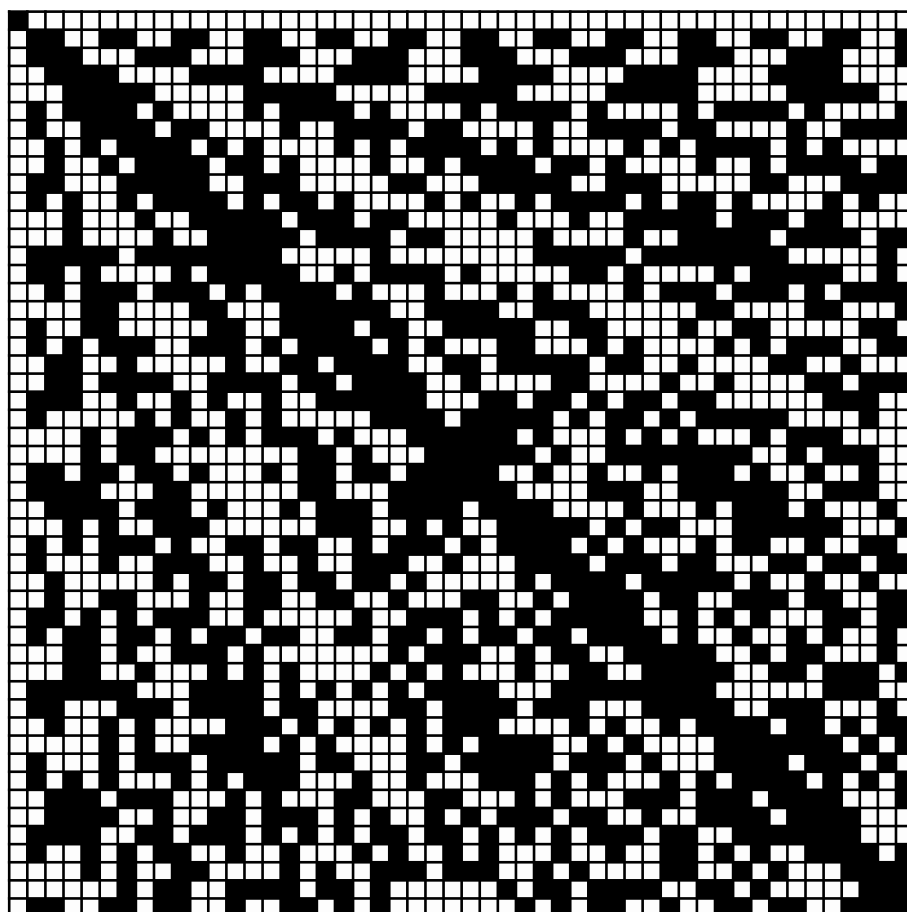
```

Table[rr[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Evaluate[Table[rr[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}]],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 0, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3	1	2	2	4	5	5	7	8	8	10
4	1	3	4	4	6	8	9	9	11	13
5	1	3	5	6	6	8	10	12	13	13
6	1	4	5	8	8	10	12	13	16	17
7	1	4	7	9	10	12	12	14	15	18
8	1	5	8	9	12	13	14	16	18	20
9	1	5	8	11	13	16	15	18	20	22
10	1	6	10	13	13	17	18	20	22	22

15. táblázat



15. ábra

## H. Betli LEGO $\oplus$

A (4.8) képlet alapján az  $F_r^-$  függvény  $r = \infty$  esetén:

```
fminf[{1, 1}] := Null
fminf[{1, 2}] := 0
fminf[{1, 3}] := 0
fminf[{2, 1}] := 0
fminf[{3, 1}] := 0
fminf[{a_, b_} /; a == 1] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[fminf[{a1, b0}], fminf[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[BitXor[fminf[{a0, b1}], fminf[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 2, b0 - 2, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  fminf[{a0, b0}] = mex[unio]
]
fminf[{a_, b_} /; b == 1] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[fminf[{a1, b0}], fminf[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 2, a0 - 2, 1}];
  H2 = Table[BitXor[fminf[{a0, b1}], fminf[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  fminf[{a0, b0}] = mex[unio]
]
fminf[{a_, b_}] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[fminf[{a1, b0}], fminf[{a0 - a1, b0}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[BitXor[fminf[{a0, b1}], fminf[{a0, b0 - b1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  fminf[{a0, b0}] = mex[unio]
]
```

Az  $R_\infty^+$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

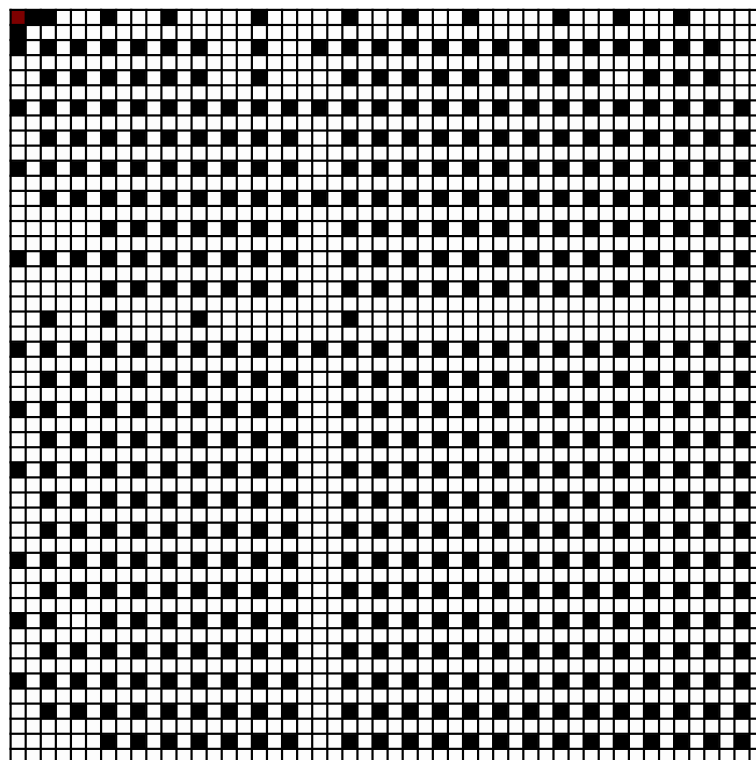
```

Table[fminf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[fminf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &), ColorFunctionScaling -> False,
Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Null	0	0	1	1	2	0	3	1	1
2	0	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	0	2	0	1	0	1	0	1	0	1
4	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1
5	1	2	0	2	0	2	0	3	0	2
6	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1
7	0	2	0	1	0	1	0	1	0	1
8	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1
9	1	2	0	2	0	2	0	3	0	2
10	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1

16. táblázat



16. ábra



Az  $F_r^+$  függvény bármely  $2 \leq r \leq \infty$  esetén:

```

fm[{a_, b_, 0}] := Null
fm[{1, 1, r_}] := Null
fm[{a_, b_, 1} /; a > 1 || b > 1] := 0
fm[{1, 2, r_} /; r > 1] := 0
fm[{1, 3, r_} /; r > 1] := 0
fm[{2, 1, r_} /; r > 1] := 0
fm[{3, 1, r_} /; r > 1] := 0
fm[{a_, b_, r_} /; a == 1] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, r0 = r, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[fm[{a1, b0, r0}], fm[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[BitXor[fm[{a0, b1, r0}], fm[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 2, b0 - 2, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  fm[{a0, b0, r0}] = mex[unio]
]
fm[{a_, b_, r_} /; b == 1] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, r0 = r, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[fm[{a1, b0, r0}], fm[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 2, a0 - 2, 1}];
  H2 = Table[BitXor[fm[{a0, b1, r0}], fm[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  fm[{a0, b0, r0}] = mex[unio]
]
fm[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {a0 = a, b0 = b, r0 = r, H1, H2, a1, b1, unio},
  H1 = Table[BitXor[fm[{a1, b0, r0}], fm[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[BitXor[fm[{a0, b1, r0}], fm[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  fm[{a0, b0, r0}] = mex[unio]
]

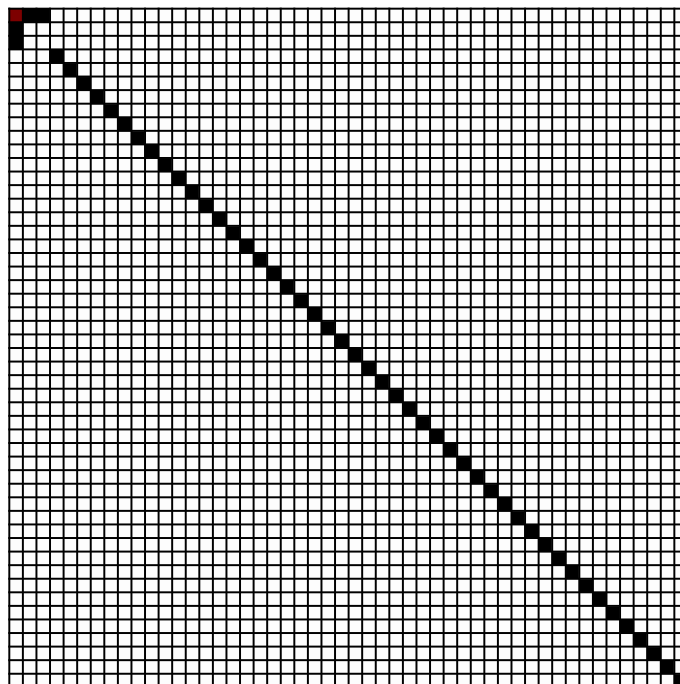
```

Az  $F_2^+$  függvény értékeinek és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[f[{{a, b, 3}}, {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[f[{{a, b, 3}}, {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
ColorFunction -> (If[# == 0, Black, White] &), ColorFunctionScaling -> False,
Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Null	0	0	1	1	2	2	3	3	4
2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0	2	1	4	3	6	5	8	7	10
4	1	3	4	0	2	7	8	5	6	11
5	1	4	3	2	0	8	7	6	5	12
6	2	5	6	7	8	0	1	4	9	3
7	2	6	5	8	7	1	0	9	4	13
8	3	7	8	5	6	4	9	0	1	2
9	3	8	7	6	5	9	4	1	0	14
10	4	9	10	11	12	3	13	2	14	0

17. táblázat



17. ábra

# I. Betli LEGO $\wedge$

Definiáljuk a loge műveletet:

```
loge[list_] :=  
Module[{list0 = list, l},  
  l = Select[list0, OddQ];  
  If[Length[l] == 0, Max[list0], Min[l]]  
]
```

A (4.9) képlet alapján az  $R_r^-$  függvény  $r = \infty$  esetén:

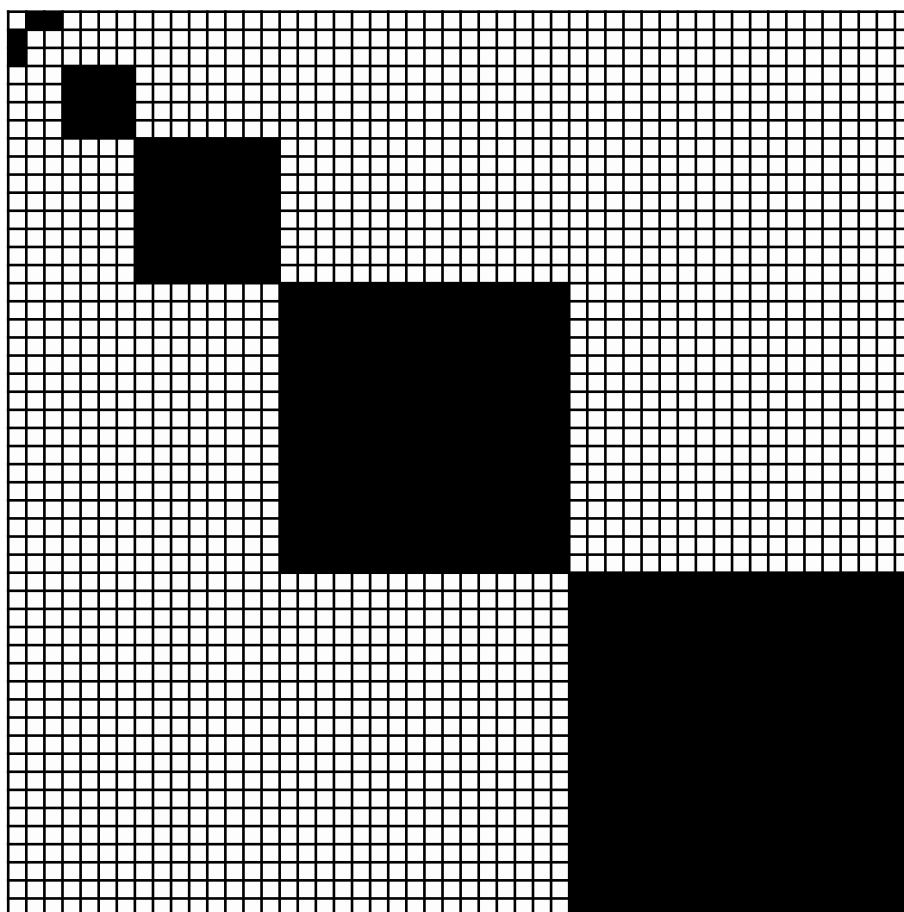
```
brinf[{1, 1}] := 0  
brinf[{a_, b_}] :=  
Module[  
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},  
  H1 = Table[Min[brinf[{a1, b0}], brinf[{a0 - a1, b0}]],  
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];  
  H2 = Table[Min[brinf[{a0, b1}], brinf[{a0, b0 - b1}]],  
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];  
  unio = Join[H1, H2];  
  brinf[{a0, b0}] = 1 + loge[unio]  
]
```

Az  $R_\infty^-$  függvény értékeinek táblázata és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[brinf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm  
ArrayPlot[Table[brinf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],  
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 1, Black, White] &),  
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
5	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
6	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
7	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
8	2	2	2	4	4	4	4	5	5	5
9	2	2	2	4	4	4	4	5	5	5
10	2	2	2	4	4	4	4	5	5	5

18. táblázat



18. ábra

Az  $R_r^-$  függvény minden  $r \leq \infty$  esetén:

```

br[{1, 1, r_}] := 0
br[{2, 2, 1}] := 2
br[{a_, b_, 1} /; a == b && a ≥ 3] := br[{a, b, 1}] = 2 a - 3
br[{a_, b_, 1} /; a < b && (a ≥ 2 && b ≥ 2)] := br[{a, b, 1}] = 2 a - 2
br[{1, 2, 1}] := 1
br[{a_, b_, 1} /; a < b && (a == 1 && b ≥ 3)] := br[{a, b, 1}] = 2 a
br[{a_, b_, 1} /; a ≥ 2 && b ≥ 2] := br[{a, b, 1}] = 2 b - 2
br[{2, 1, 1}] := 1
br[{a_, b_, 1} /; a > 2 && b == 1] := br[{a, b, 1}] = 2 b
br[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[Min[br[{a1, b0, r0}], br[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Min[br[{a0, b1, r0}], br[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  br[{a0, b0, r0}] = 1 + loge[unio]
]

```

Az  $R_2^-$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

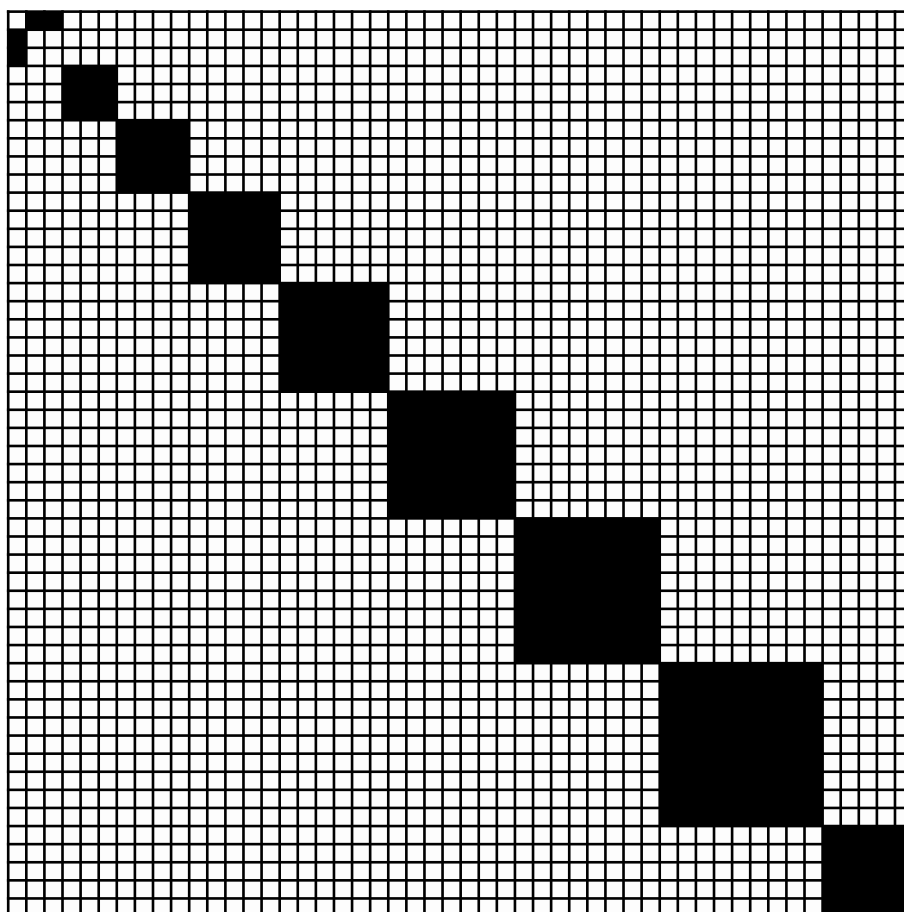
```

Table[br[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[br[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 1, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4
5	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4
6	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4
7	2	2	2	4	4	4	5	5	5	5
8	2	2	2	4	4	4	5	5	5	5
9	2	2	2	4	4	4	5	5	5	5
10	2	2	2	4	4	4	5	5	5	5

19. táblázat



19. ábra

## J. Betli LEGO $\Delta$

Definiáljuk a gole műveletet:

```
gole[list_] :=  
Module[{list0 = list, l},  
  l = Select[list0, OddQ];  
  If[Length[l] == 0, Min[list0], Max[l]]  
]
```

A (4.10) képlet alapján az  $S_r^-$  függvény  $r = \infty$  esetén:

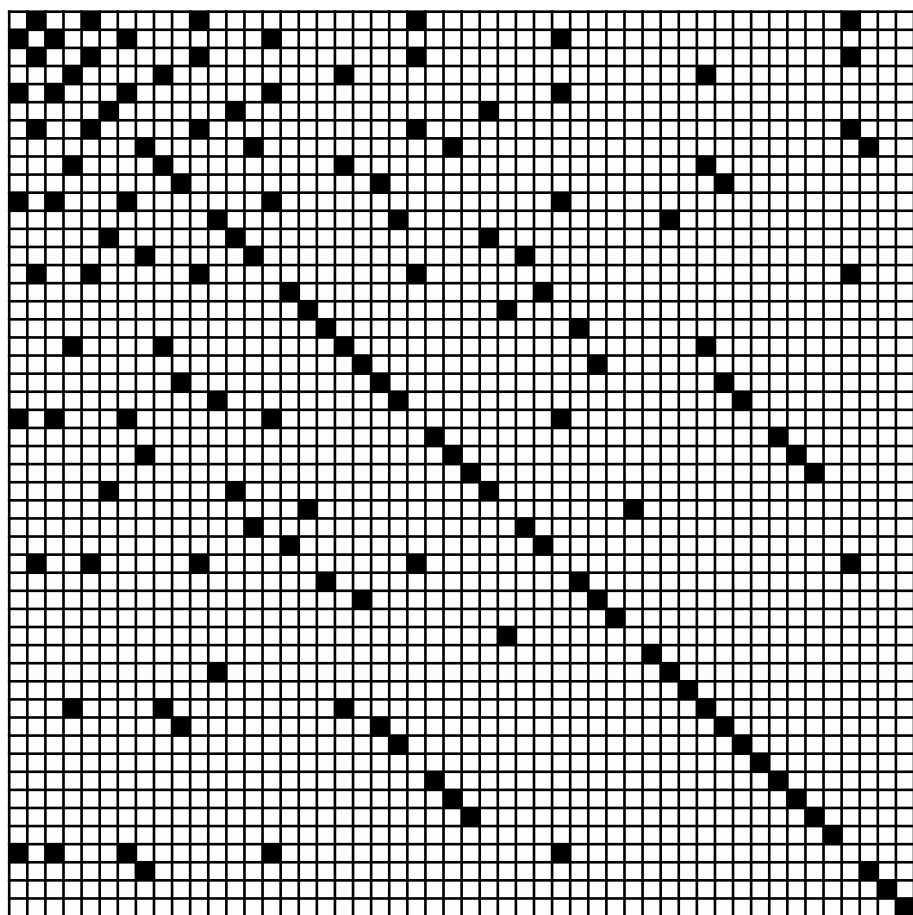
```
bsinf[{1, 1}] := 0  
bsinf[{a_, b_}] :=  
Module[  
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},  
  H1 = Table[Max[bsinf[{a1, b0}], bsinf[{a0 - a1, b0}]],  
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];  
  H2 = Table[Max[bsinf[{a0, b1}], bsinf[{a0, b0 - b1}]],  
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];  
  unio = Join[H1, H2];  
  bsinf[{a0, b0}] = 1 + gole[unio]  
]
```

Az  $S_\infty^-$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[bsinf[{a, b}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm  
ArrayPlot[Table[bsinf[{a, b}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],  
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 1, Black, White] &),  
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	2	3	4	4	4	4	4
2	1	2	3	4	4	4	5	6	6	6
3	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6
4	2	4	4	5	6	6	6	6	7	8
5	3	4	5	6	6	6	7	8	8	8
6	4	4	6	6	6	7	8	8	8	8
7	4	5	6	6	7	8	8	8	8	8
8	4	6	6	6	8	8	8	7	8	8
9	4	6	6	7	8	8	8	8	9	10
10	4	6	6	8	8	8	8	8	10	9

20. táblázat



20. ábra



Az  $S_r^-$  függvény minden  $r \leq \infty$  esetén

```

bs[{1, 1, r_}] := 0
bs[{2, 2, 1}] := 2
bs[{a_, b_, 1} /; a == b] := bs[{a, b, 1}] = 3
bs[{1, 2, 1}] := 1
bs[{a_, b_, 1} /; a < b && a == 1] := bs[{a, b, 1}] = 2
bs[{a_, b_, 1} /; a < b && a == 2] := bs[{a, b, 1}] = 2
bs[{a_, b_, 1} /; a < b && b ≥ 3] := bs[{a, b, 1}] = 4
bs[{2, 1, 1}] := 1
bs[{a_, b_, 1} /; b == 1] := bs[{a, b, 1}] = 2
bs[{a_, b_, 1} /; b == 2] := bs[{a, b, 1}] = 2
bs[{a_, b_, 1} /; a ≥ 3] := bs[{a, b, 1}] = 4
bs[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[Max[bs[{a1, b0, r0}], bs[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[Max[bs[{a0, b1, r0}], bs[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  bs[{a0, b0, r0}] = 1 + gole[unio]
]

```

Az  $S_2^-$  függvény értékeinek táblázata és a játék jó állásainak táblázata:

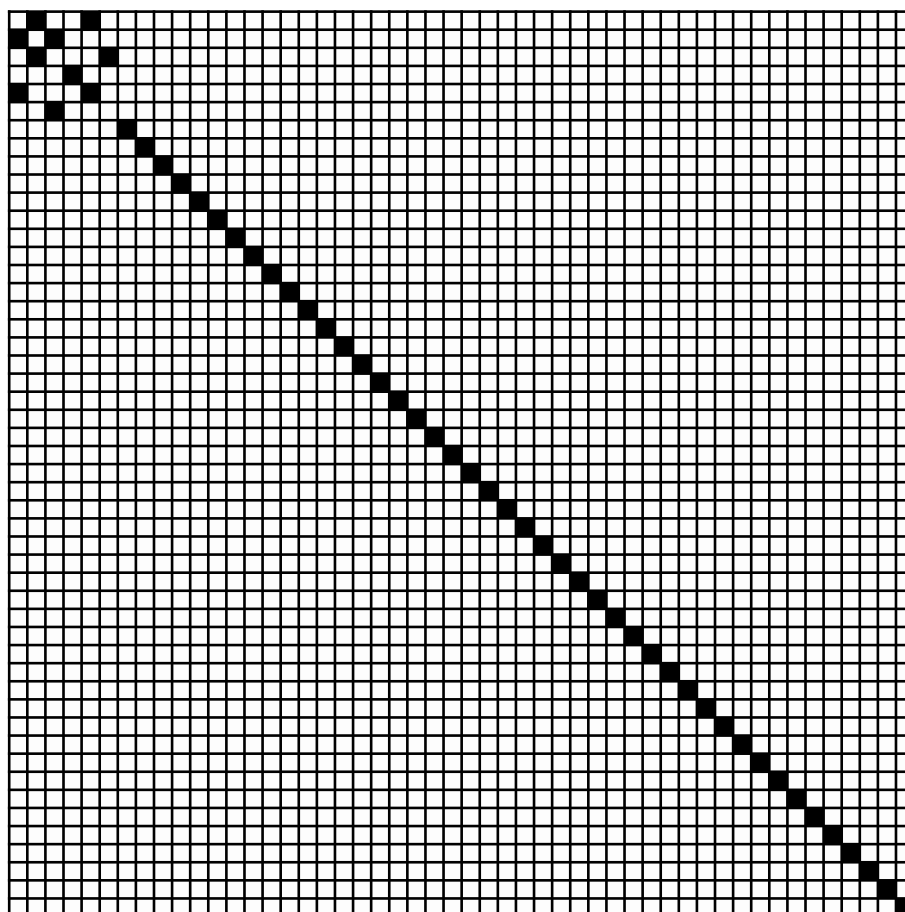
```

Table[bs[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[bs[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 1, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	2	3	4	4	4	4	4
2	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
3	2	3	4	4	4	5	6	6	6	6
4	2	4	4	5	6	6	6	6	6	6
5	3	4	4	6	5	6	6	6	6	6
6	4	4	5	6	6	6	6	6	6	6
7	4	4	6	6	6	6	5	6	6	6
8	4	4	6	6	6	6	6	5	6	6
9	4	4	6	6	6	6	6	6	5	6
10	4	4	6	6	6	6	6	6	6	5

21. táblázat



21. ábra

## K. Betli LEGO $\nabla$

Definiáljuk a  $\nabla$  műveletet:

```
bh[x_, y_] :=  
Piecewise[  
  {{0, x == 0 || y == 0},  
  {x + y - 1, Mod[x, 2] + Mod[y, 2] ≥ 1},  
  {x + y - 2, Mod[x, 2] + Mod[y, 2] == 0}  
}]
```

A (4.11) képlet alapján az  $R_r^-$  függvény  $r = \infty$  esetén:

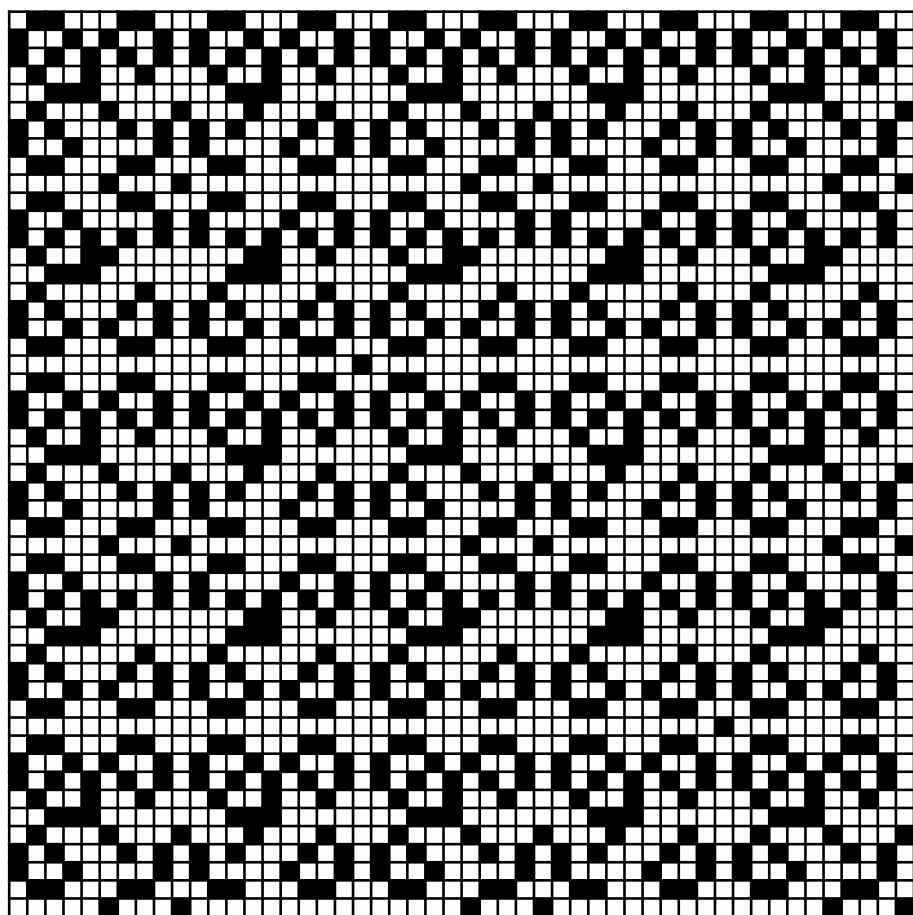
```
brrinf[{1, 1}] := 0  
brrinf[{a_, b_}] :=  
Module[  
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a},  
  H1 = Table[bh[brrinf[{a1, b0}], brrinf[{a0 - a1, b0}],  
    {a1, 1, a0 - 1, 1};  
  H2 = Table[bh[brrinf[{a0, b1}], brrinf[{a0, b0 - b1}],  
    {b1, 1, b0 - 1, 1};  
  unio = Join[H1, H2];  
  brrinf[{a0, b0}] = 1 + loge[unio]  
]
```

Az  $R_\infty^-$  függvény értékeinek táblázata, és a játék jó állásainak táblázata:

```
Table[brr[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1} // MatrixForm  
ArrayPlot[Table[brr[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],  
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 1, Black, White] &),  
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4
2	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8
3	1	2	3	4	5	6	9	8	11	10
4	2	3	4	6	7	10	10	13	14	14
5	2	4	5	7	9	10	12	14	16	18
6	2	5	6	10	10	15	18	20	22	25
7	3	6	9	10	12	18	21	24	27	30
8	3	6	8	13	14	20	24	26	31	34
9	4	7	11	14	16	22	27	31	34	38
10	4	8	10	14	18	25	30	34	38	41

22. táblázat



22. ábra

A játék  $R_r^-$  függvénye bármely  $r \leq \infty$  esetén

```

brr[{1, 1, r_}] := 0
brr[{2, 2, 1}] := 2
brr[{a_, b_, 1} /; a == b && a ≥ 3] := brr[{a, b, 1}] = 2 a - 3
brr[{a_, b_, 1} /; a < b && (a ≥ 2 && b ≥ 2)] := brr[{a, b, 1}] = 2 a - 2
brr[{1, 2, 1}] := 1
brr[{a_, b_, 1} /; a < b && (a == 1 && b ≥ 3)] := brr[{a, b, 1}] = 2 a
brr[{a_, b_, 1} /; a ≥ 2 && b ≥ 2] := brr[{a, b, 1}] = 2 b - 2
brr[{2, 1, 1}] := 1
brr[{a_, b_, 1} /; a > 2 && b == 1] := brr[{a, b, 1}] = 2 b
brr[{a_, b_, r_}] :=
Module[
  {H1, H2, unio, a1, b1, b0 = b, a0 = a, r0 = r},
  H1 = Table[bh[brr[{a1, b0, r0}], brr[{a0 - a1, b0, r0 - 1}]],
    {a1, 1, a0 - 1, 1}];
  H2 = Table[bh[brr[{a0, b1, r0}], brr[{a0, b0 - b1, r0 - 1}]],
    {b1, 1, b0 - 1, 1}];
  unio = Join[H1, H2];
  brr[{a0, b0, r0}] = 1 + loge[unio]
]

```

Az  $R_2^-$  függvény értékeinek táblázata és a játék jó állásainak táblázata:

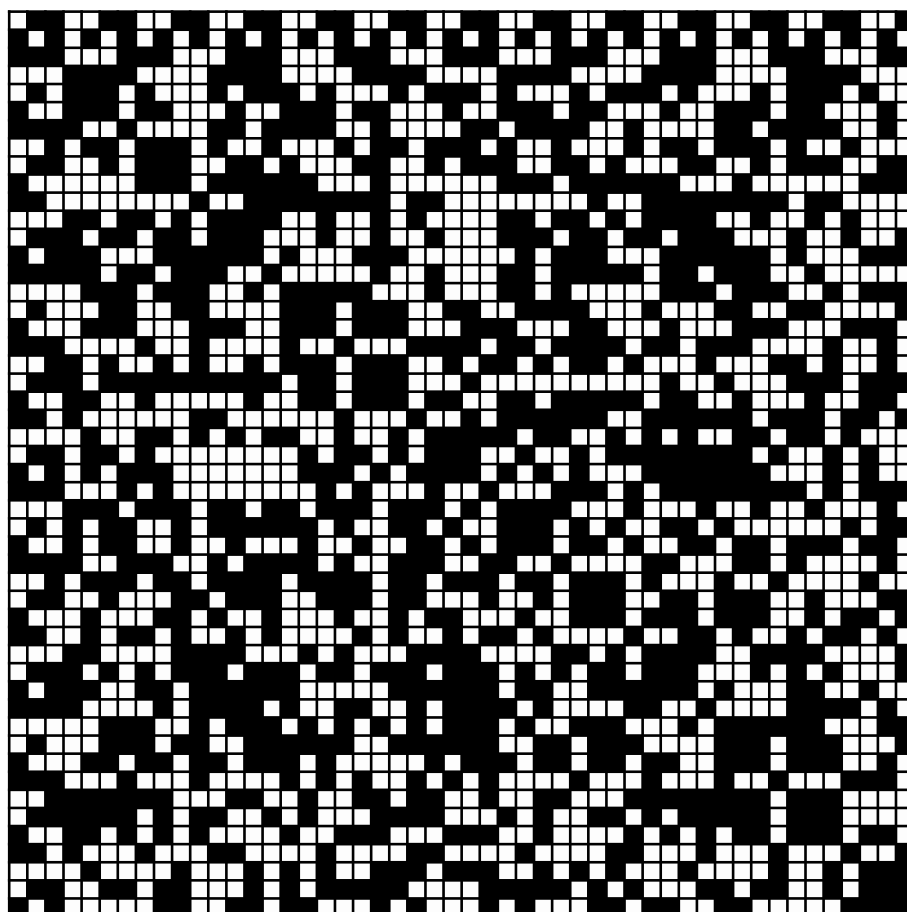
```

Table[brr[{a, b, 2}], {a, 1, 10, 1}, {b, 1, 10, 1}] // MatrixForm
ArrayPlot[Table[brr[{a, b, 2}], {a, 1, 50, 1}, {b, 1, 50, 1}],
  ColorFunction -> (If[Mod[#, 2] == 1, Black, White] &),
  ColorFunctionScaling -> False, Mesh -> All, MeshStyle -> Black]

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	2	1	1	2	2	1
2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4
3	1	3	3	4	6	6	3	3	3	6
4	2	4	4	5	5	5	5	10	10	10
5	2	3	6	5	7	7	10	5	12	14
6	1	4	6	5	7	7	10	7	7	14
7	1	3	3	5	10	10	9	12	14	14
8	2	4	3	10	5	7	12	9	9	11
9	2	3	3	10	12	7	14	9	11	11
10	1	4	6	10	14	14	14	11	11	13

23. táblázat



23. ábra

## Hivatkozások

- [1] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A K Peters, 2001
- [2] John. H. Conway: *On Numbers and Games*, Academic Press, 1979
- [3] Csákány Béla: *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon, 2005
- [4] Hégely Éva: *Kombinatorikai játékok vizsgálata a Kalmár–Steinhaus-függvény segítségével*, Matematika BSc szakdolgozat, Szegedi Tudományegyetem, 2014

# Nyilatkozat

Alulírott Hégely Éva kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2017. május 19.

Hégely Éva  
Matematika MSc hallgató